

**Titre:** Étude et amélioration des performances d'une méthode de mesure en champ proche : la méthode des courants magnétiques équivalents  
**Title:**

**Auteur:** Jérôme Colinas  
**Author:**

**Date:** 2001

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Colinas, J. (2001). Étude et amélioration des performances d'une méthode de mesure en champ proche : la méthode des courants magnétiques équivalents  
**Citation:** [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/6968/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:**  
PolyPublie URL: <https://publications.polymtl.ca/6968/>

**Directeurs de recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE ET AMÉLIORATION DES PERFORMANCES  
D'UNE MÉTHODE DE MESURE EN CHAMP PROCHE: LA  
MÉTHODE DES COURANTS MAGNÉTIQUES ÉQUIVALENTS

JÉRÔME COLINAS

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES (M.Sc.A.)  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

AOÛT 2001



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

**0-612-65569-5**

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ÉTUDE ET AMÉLIORATION DES PERFORMANCES D'UNE  
MÉTHODE DE MESURE EN CHAMP PROCHE: LA  
MÉTHODE DES COURANTS MAGNÉTIQUES ÉQUIVALENTS

présenté par: COLINAS Jérôme

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GHANNOUCHI Fadhel M., Ph.D., président

M. LAURIN Jean-Jacques, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GOUSSARD Yves, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. SAVARD Pierre, Ph.D., membre

*Nihil est simul et inventum et perfectum.*

(Cicéron)

à Nhathi,

## REMERCIEMENTS

Je remercie mon directeur Jean-Jacques Laurin et mon codirecteur Yves Gousard pour leurs conseils et leur patience pendant nos nombreuses heures de discussion.

Je remercie également Jules Gauthier et Steve Dubé pour leur aide lors de la fabrication des circuits et de la table de mesures en champ proche.

Merci aussi à Zacharia Ouairhi, Pierre Richard Renaud et Tiberiu Visan pour les longues mais très enrichissantes conversations.

Finalement, je voudrais remercier Nhathi et mes parents pour leur soutien pendant ces deux années d'études.

## RÉSUMÉ

Le présent Mémoire de Maîtrise résume les travaux réalisés dans le but de valider et d'améliorer une technique de modélisation des champs électromagnétiques émis par une structure rayonnante aussi bien à très faible distance (champ proche) qu'à grande distance (champ lointain). Les mesures en champ proche peuvent être utilisées dans de nombreuses applications : en antenne, en compatibilité électromagnétique ou même dans le domaine médical.

Dans ce domaine, différentes approches sont possibles pour caractériser les structures rayonnantes. Deux méthodes utilisées parmi d'autres sont : l'analyse par transformée de Fourier et la modélisation par la méthode des *Courants Magnétiques Équivalents* (CME). Dans le cadre de ce travail nous nous sommes proposés de valider et d'améliorer cette dernière.

La méthode CME peut se résumer par les étapes suivantes : a) on modélise la structure rayonnante plane (circuits, antennes, etc.) sous la forme d'un réseau 2D de dipôles représentatifs, b) on calcule le champ lointain produit par ce réseau de dipôles fictifs.

Pour établir le réseau de dipôles représentatifs, on procède de la manière suivante : a) on balaie la surface étudiée à faible distance au moyen d'une sonde, b) on mesure et enregistre les variations du champ proche, c) on détermine à l'aide d'un modèle mathématique le réseau de dipôles représentatifs, qui produirait les mêmes variations

du champ avec une précision suffisante. Le champ lointain est alors calculé sur la base de ce modèle, au moyen des équations de champ lointain usuelles.

Cette méthode offre de nombreux avantages et quelques inconvénients par rapport à la méthode des transformées de Fourier. Elle nécessite un appareillage de faible coût et donne des résultats plus précis. De plus, cette méthode permet de calculer les diagrammes de champs lointains pour des structures dont le plan de masse est de taille restreinte en termes de longueurs d'ondes. Ses principaux inconvénients sont des durées de calculs excessives, et la sensibilité des résultats aux sources d'erreur : mesure de champ, précision du modèle, méthodes numériques, etc.

Dans le cadre de cette recherche, avec l'objectif général de faire l'étude et la validation de la méthode CME, nous nous sommes spécifiquement attachés à répondre aux problèmes spécifiques suivants qui représentent les obstacles les plus critiques de cette approche : a) L'amélioration des performances du programme de calcul des courants magnétiques sources : en effet, la principale limite d'application de cette méthode est la durée de calcul requise, comparativement à la méthode alternative par transformée de Fourier. b) La réduction de l'effet induit par les différentes sources d'erreur : perturbations externes, précision des mesures, modélisation des courants sources, méthodes numériques, etc. c) La validation de la méthode CME : cette méthode a été peu appliquée jusqu'à présent en raison de sa nouveauté et des problèmes ci-dessus.

Le contenu du présent mémoire est comme suit. Tout d'abord, au Chapitre 1,



la théorie relative à la technique de mesure en champ proche est présentée. Ensuite au Chapitre 2, les performances des différents algorithmes alternatifs de calcul de la matrice d'impédances mutuelles sont étudiées. En effet, le temps de traitement des mesures en champ proche est généralement limité par le calcul de la matrice d'impédance utilisée pour calculer les sources de courant magnétique à partir de ces mesures en champ proche. Les performances comparatives des différents algorithmes testés sont évaluées. L'algorithme amélioré qui a été élaboré, par extension et synthèse des précédents, est présenté. Au Chapitre 3, le montage expérimental, spécifiquement conçu et fabriqué dans le cadre de ce travail, est décrit. Au Chapitre 4, les travaux effectués sur deux exemples concrets de structure rayonnante sont présentés. Le montage expérimental a permis d'étudier deux problèmes typiques : celui d'une antenne fente alimentée par micro-ruban et celui d'une antenne fente couplée à une ligne coplanaire. Pour chaque cas, les mesures effectuées, le maillage de modélisation, le calcul des courants, et la détermination du champ lointain sont présentés. Pour chacune des antennes type étudiées, le diagramme du champ lointain obtenu par cette méthode est comparé, d'une part au champ obtenu par simulation à l'aide d'outils CAO, d'autre part aux mesures directes du champ dans une chambre anéchoïde. Les différences sont commentées et la méthode est validée pour ces cas expérimentaux. Afin de garantir une bonne précision de résultats, il convient de spécifier les sources d'erreur et les limites de validité de cette méthode. Au Chapitre 5, les principales sources d'erreur sont énumérées sur une base empirique, et leur impact

potentiel est décrit qualitativement. Pour la principale d'entre elles, la perturbation de la sonde, son analyse quantitative expérimentale est présentée. Au Chapitre 6, un ensemble d'outils de traitement de données permettant de minimiser les effets des erreurs inhérentes à cette méthode est présenté. Ces techniques déjà éprouvées dans le domaine du traitement d'image ont été appliquées avec succès. Les résultats obtenus sont présentés et ils montrent qu'on peut réduire les effets des sources d'erreur. En particulier, les problèmes de manipulation de matrices ont été éliminés.

Les principales contributions de ce travail sont les suivantes :

- La méthode des CME offre une alternative précise et de moindre coût pour déterminer les diagrammes de rayonnement en champ lointain et les courants à la surface pour des structures rayonnantes telles que les antennes et les circuits électriques *PCB*.
- Les améliorations de la routine de traitements de données élaborées ici permettent une diminution du temps de calcul d'un facteur 10 dans des conditions optimales.
- Les effets de la perturbation de la sonde peuvent être négligés.
- La technique de régularisation, traditionnellement utilisée en traitement d'image, et utilisée pour la première fois dans ce domaine, permet de réduire les problèmes de conditionnement de matrice ainsi que les effets de certaines sources d'erreur.

## ABSTRACT

This Master Thesis presents the work carried out in view of improving and validating a modelling method of the electromagnetic fields radiated by a device at short and long distances (near-field and far-field).

In this research area, many ways of addressing the radiating device characterization are possible. Two methods used among others are : the Fourier Transform analysis and the Equivalent Magnetic Current (EMC) modeling method.

The scope of the present work was to validate and improve the EMC method based on a modelling of the radiation observed at short distance, or near-field measurements.

Near-field measurements may be used in many different applications such as antennas, electromagnetic compatibility or biomedical imaging. The EMC may be briefly described as follows : a) model a planar radiating structure (circuit, antennas, etc.) by means of an equivalent grid of dipoles in 2D, and b) compute the far-field produced by this dipole network.

To establish the virtual dipole network we proceed as follows : a) we scan the surface of interest above the radiating structure at very short distances by means of a probe, b) we measure and record the field variations, c) we determine by a mathematical model the virtual dipole network which would produce the same recorded

field variations with a degree of accuracy. The far-field is then computed based on this model by means of the usual far-field equations.

This method has many advantages and few drawbacks if compared with the Fourier Transform Method : it yields and requires inexpensive tools. Moreover, this method is capable of computing the far-field diagrams on a finite ground plane of reduced size. The main drawbacks are the long processing time and the sensitivity to error sources : measured field, model precision, field of validity of the simplified numerical method utilized.

Keeping in mind that the main objectives of this work are the study and validation of the EMC method, we will address the following issues : a) Computation performance improvements of the magnetic currents sources. Indeed, the main application limitation of this method is the computation time, versus the Fourier Transform Method. b) The reduction of the effect coming from the different error sources : external perturbation, measurement precision, current sources modelling, etc. c) The validation of the EMC method : this method has not been used very often so far because of its novelty and due to the above mentioned problems.

The content of the present Master Thesis is as follows. In Chapter 1, the theory of our near-field method is presented. The processing time of the near-field data is generally limited by the computation of the impedance matrix used to calculate EMC sources from these near-field measurements. In Chapter 2, the performance from different tested algorithms has been evaluated and compared, and an improved algo-

rithm has been elaborated. The improved algorithm of computation is a synthesis of the different algorithms applicable in various conditions. In Chapter 3, the measurement bench specifically designed and fabricated for this work is described. In Chapter 4, the works achieved with two real applications of radiating devices is shown. The experimental setup was used to study two antennas : a simple slot antenna and a slot antenna fed by a coplanar waveguide. In each case, the near-field measurements, the mesh model, the current sources and the far-field results are shown. The far-field pattern obtained from this method is compared with the far-field results obtained on one hand with CAD tools and on the other hand with measurements in the anechoic chamber. In order to guarantee a good accuracy, one must specify the error sources and the validity limits of this method. In Chapter 5, the experimental error sources, are enumerated and discussed on an empirical basis and the impact on the result is qualitatively described. A quantitative study is presented for the main error source : the probe perturbation. Finally, in Chapter 6, data processing tools to minimize the effect of these experimental and numerical error sources are investigated. These tools already used in the area of image processing were applied with success. The presented results show that the effect of error sources may be reduced. Particularly, the problems of matrix manipulation were eliminated.

The key results of this work are :

- as the experimental validation has shown, this method is a precise and low-cost

alternative to determine far-field patterns and currents on antenna surfaces and PCB electric circuits,

- the improvements of the processing routines developed bring a reduction of computing time by a factor of about 10 in good conditions,
- it was found that the effect of the probe perturbation may be neglected,
- a regularization technique, traditionally used in image processing and used for the first time in this research area, reduces matrix conditioning problems as well as the effects of some error sources.

**TABLE DES MATIÈRES**

<b>REMERCIEMENTS</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>RÉSUMÉ</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b> . . . . .	<b>xiv</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS</b> . . . . .	<b>xxi</b>
<b>LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS</b> . . . . .	<b>xxii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b> . . . . .	<b>xxvii</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b> . . . . .	<b>xxviii</b>
<b>LISTE DES ANNEXES</b> . . . . .	<b>xxxvii</b>
<b>INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
0.1 Généralités . . . . .	1
0.2 Intérêt des mesures en champ proche . . . . .	1
0.3 Approche générale . . . . .	2
0.4 Historique des mesures en champ proche . . . . .	3
0.5 Description de la méthode des courants magnétiques équivalents . . . . .	3

0.6	Considérations pratiques . . . . .	4
0.7	Avantages . . . . .	5
0.8	Problématique . . . . .	6
0.9	Objectifs . . . . .	6
0.10	Structure du mémoire . . . . .	7

## **CHAPITRE 1 : Technique de mesure en champ proche à l'aide de la**

	<b>méthode des courants magnétiques équivalents . . . .</b>	<b>9</b>
1.1	Origine de la méthode CME . . . . .	9
1.2	La méthode des moments . . . . .	9
1.2.1	Équation générale . . . . .	9
1.2.2	La méthode des moments et les résidus pondérés . . . . .	10
1.2.3	La méthode de Garlekin . . . . .	14
1.3	La méthode des moments comme fondement de la technique de CME	15
1.3.1	Description de la méthode CME . . . . .	15
1.4	Description du programme <i>Slot</i> . . . . .	21
1.4.1	Généralités . . . . .	21
1.4.2	Algorithme du programme . . . . .	21
1.4.3	Description détaillée de l'algorithme du programme . . . . .	22
1.4.4	Détail sur les différents modes de calcul . . . . .	23
1.4.5	Description de la méthode d'inversion de la matrice $[Z]$ par décomposition en valeurs singulières . . . . .	25



1.4.6	Contraintes du programme . . . . .	27
1.5	Avantages et inconvénients de la méthode CME . . . . .	27

## **CHAPITRE 2 : Optimisation du calcul des éléments de la matrice d'im-**

	<b>pédance mutuelle . . . . .</b>	<b>29</b>
2.1	Nécessité d'analyser les routines de calcul . . . . .	29
2.2	Développement des différentes méthodes de calculs de l'impédance mutuelle . . . . .	32
2.2.1	Méthodes disponibles . . . . .	32
2.2.2	Développement du calcul de l'impédance mutuelle pour l'inté- gration par quadrature de Gauss-Kronrod . . . . .	33
2.2.3	Expression de l'impédance mutuelle donnée par Balanis . . . . .	38
2.2.4	Expression de l'impédance mutuelle approximée à champ H constant sur le dipôle magnétique . . . . .	43
2.2.4.1	Étude de l'erreur sur le calcul de l'impédance mu- tuelle approximée à champ H constant sur le dipôle électrique . . . . .	45
2.3	Recherche et analyse d'un algorithme hybride : compromis entre le temps de calcul et la précision numérique . . . . .	49
2.3.1	Performances de calculs entre les différentes méthodes de calcul de l'impédance . . . . .	50

2.3.1.1	Performances de calculs à partir de l'expression de Balanis . . . . .	50
2.3.1.2	Performances de calculs à partir de l'impédance mu- tuelle approximée à champ $\vec{H}$ constant sur le dipôle magnétique . . . . .	52
2.3.2	Développement d'une méthode hybride de calcul de l'impédance	52
2.3.2.1	Performances de la méthode hybride de calcul de l'impédance . . . . .	55
2.4	Conclusion . . . . .	58
<b>CHAPITRE 3 : Montage expérimental . . . . .</b>		<b>60</b>
3.1	La table de mesures en champ proche . . . . .	60
3.2	La sonde de mesure . . . . .	62
3.3	Le système de mesures en champ proche . . . . .	64
3.4	La chambre anéchoïde . . . . .	66
<b>CHAPITRE 4 : Validation expérimentale . . . . .</b>		<b>67</b>
4.1	Antenne fente alimentée par micro-ruban . . . . .	68
4.1.1	Conception de l'antenne fente . . . . .	68
4.1.2	Mesures en champ proche et champ lointain . . . . .	70
4.1.2.1	Mesures en champ proche . . . . .	70
4.1.2.2	Maillage de la grille de courants . . . . .	71

4.1.2.3	Détermination des courants magnétiques . . . . .	72
4.1.2.4	Calcul du champ lointain . . . . .	73
4.2	Antenne fente couplée par une ligne coplanaire . . . . .	74
4.2.1	Principe de fonctionnement . . . . .	74
4.2.2	Mesures en champ proche et en champ lointain . . . . .	76
4.2.2.1	Mesures en champ proche . . . . .	76
4.2.2.2	Maillage de la grille de courants . . . . .	77
4.2.2.3	Détermination des courants magnétiques . . . . .	78
4.2.2.4	Calcul du champ lointain . . . . .	78
4.3	Conclusion . . . . .	82
<b>CHAPITRE 5 : Analyse des sources d'erreur . . . . .</b>		<b>84</b>
5.1	Analyse qualitative des sources d'erreur . . . . .	85
5.1.1	Sources d'erreur expérimentales . . . . .	86
5.1.2	Sources d'erreur de modélisation . . . . .	88
5.1.2.1	Simplification du modèle de mesure en champ proche . . . . .	88
5.1.2.2	Problème de localisation de la source . . . . .	90
5.2	Analyse expérimentale de la perturbation de la sonde . . . . .	90
5.2.1	Théorie . . . . .	90
5.2.2	Résultats . . . . .	94
5.2.3	Comparaison des champs proches reconstitués avec HFSS . . . . .	101
5.3	Conclusion . . . . .	102

## CHAPITRE 6 : Techniques de régularisation pour pallier les différentes

sources d'erreur . . . . .	103
6.1 Problème inverse mal posé . . . . .	103
6.2 Technique des moindres carrés ( <i>SVD</i> ) et <i>surdimensionnement</i> . . . .	106
6.3 Technique de régularisation avec pénalité pour un système simple qua- dratique linéaire . . . . .	109
6.4 <i>Generalized Cross Validation</i> , estimateur robuste de l'erreur sur les sources de courant . . . . .	111
6.5 Étude de la régularisation avec GCV comme estimateur de $\lambda$ en fonc- tion du <i>surdimensionnement</i> . . . . .	112
6.6 Étude de la régularisation avec GCV comme estimateur de $\lambda$ en fonc- tion de l'erreur sur la distance de mesure . . . . .	119
6.7 Applications de la méthode de régularisation de Tikhonov . . . . .	122
6.7.1 Application de la méthode de régularisation sur le calcul des courants dans une antenne fente alimentée par ligne coplanaire	123
6.7.1.1 Paramètres expérimentaux . . . . .	123
6.7.1.2 Définition du maillage des courants . . . . .	123
6.7.1.3 Courants magnétiques équivalents avec la technique de régularisation . . . . .	124
6.7.1.4 Résultats en champ lointain avec la technique de ré- gularisation . . . . .	125

6.7.2	Application de la méthode de régularisation sur le calcul des courants sur une ligne de transmission coplanaire avec un coude	127
6.7.2.1	Description de la structure étudiée . . . . .	127
6.7.2.2	Paramètres expérimentaux . . . . .	128
6.7.2.3	Courants magnétiques équivalents . . . . .	129
6.8	Régularisation appliquée sur des groupes de dipôles connectés . . . .	130
6.8.1	Application à une antenne fente à trois éléments couplés par une ligne de transmission coplanaire . . . . .	134
6.8.1.1	Description de la structure étudiée et mesures en champ proche . . . . .	134
6.8.1.2	Définition de la surface de maillage . . . . .	135
6.8.1.3	Courants magnétiques équivalents . . . . .	136
6.9	Conclusion . . . . .	139
<b>CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS . . . . .</b>		<b>142</b>
<b>RÉFÉRENCES . . . . .</b>		<b>147</b>

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

AUT	Antenne sous test
CAO	Conception assistée par ordinateur
CME	Courants Magnétiques Équivalents
GCV	<i>Generalized Cross Validation</i>
HFSS	High Frequency Structure Simulator
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i>
SLATEC	<i>Sandia, Los Alamos, Air Force Weapons Laboratory Technical Exchange Committee</i> , Ensemble de routines mathématiques et statistiques
Slot	Logiciel qui permet le calcul des courants magnétiques et du champ lointain
MoM	Méthode des moments

## LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS

$A(\lambda)$	Fonction utilisée dans le calcul de la fonction GCV
$Ci[z]$	Fonction intégrale du cosinus
$D$	Matrice globale des différences premières
$D_n$	Matrice des différences premières associée à un groupe de dipôles
$d$	Distance entre le plan de mesure et l'AUT
$\Delta_\epsilon$	différence sur l'erreur relative du champ lointain avec et sans régularisation
$\Delta_d$	Erreur sur la distance entre le plan de mesure et l'AUT
$\bar{E}$	Champ électrique
$E_{coax1}$	Signal émis par l'AUT vers le câble coaxial de la sonde
$E_{coax2}$	Signal réfléchi par le câble coaxial de la sonde vers l'AUT
$E_{coax-dip}$	Signal réfléchi par le câble coaxial vers le dipôle de la sonde
$E_{dip1}$	Signal émis par l'AUT vers les dipôles
$E_{dip2}$	Signal réfléchi par les dipôles vers l'AUT
$E^{inc}$	Champ électrique incident sur une surface conductrice
$Exp[z]$	Fonction intégrale de l'exponentielle
$e_2$	Signal incident sur la sonde

$\varepsilon$	Erreur relative sur les coefficients de courants retrouvés par simulation
$\varepsilon_{planE}$	Erreur relative sur le calcul de champ lointain dans le plan E
$\varepsilon_{planH}$	Erreur relative sur le calcul de champ lointain dans le plan H
$\epsilon_r \text{ estime}$	Erreur relative estimée sur le calcul de l'impédance approximé
$FF$	Champ lointain normalisé
$f_n$	Fonction de base <i>sinusoïdale par bout</i>
$G(\lambda)$	Fonction GCV
$G_n$	Groupe de dipôles colinéaires
$\Gamma_s$	Coefficient de réflexion du signal émis par l'AUT et réfléchi par la sonde
$\bar{H}$	Champ magnétique
$HPBW$	Largeur à mi-puissance du diagramme de champ lointain
$I_m$	Coefficients des courants magnétiques sur l'AUT
$I_p$	Coefficients des courants électriques sur la sonde
$\bar{I}(t)$	Courant électrique dans la sonde
$I_{\lambda \min}$	Coefficients des courants magnétiques après régularisation avec $\lambda_{min}$
$I(0)$	Courant d'alimentation lorsque le dipôle est opéré en transmission



$I_1, I_2$	Courant magnétique de chaque côté de la ligne de transmission coplanaire
$I_c, I_d$	Courant mode commun et mode différentiel dans la ligne de transmission coplanaire
$I_n$	Vecteur coefficients des courants associés à un groupe de dipôles
$J$	Courant électrique induit dans la sonde lorsqu'utilisée en émission
$K$	Rapport entre les mesures de $S_{11m}, S_{21m}$ et $\Gamma_s$
$K(z, z')$	Noyau associé à l'équation intégrale
$L$	Longueur du dipôle électrique
$l_{mag}$	Longueur du dipôle magnétique
$l_{sonde}$	Longueur de la sonde
$l/2$	Longueur du monopôle magnétique
$\lambda$	Longueur d'onde
$\lambda$	Paramètre de régularisation
$\lambda_{guide}$	Longueur d'onde guidée dans une ligne de transmission
$\lambda_{min}$	Paramètre de régularisation qui minimise l'erreur sur les courants
$\lambda_{min \ \varepsilon}$	Paramètre de régularisation qui minimise l'erreur sur les courants réels
$\lambda_{min \ GCV}$	Paramètre de régularisation qui minimise la fonction GCV
$M$	Nombre de points de mesure

$\mathbf{M}$	Matrice identité
$\tilde{M}$	Matrice globale des différences secondes
$\tilde{M}_n$	Matrice des différences secondes associée à un groupe de dipôles
$\tilde{M}_b$	Distribution du courant magnétique
$\tilde{M}(t)$	Courants magnétiques
$N$	Nombre de coefficients $I_m$ inconnus à déterminer
$\phi$	Angle entre le dipôle de la sonde et l'axe des $x$
$R$	Somme résiduelle des composantes tangentielles des champs incidents et diffractés
$R_l$	Résistance de la charge connectée à la sonde
$\text{Si}[z]$	Fonction intégrale du sinus
$S_{11}$	Coefficient de réflexion à l'entrée de l'AUT sans sonde
$S_{11m}$	Coefficient de réflexion mesuré à l'entrée de l'AUT en présence de la sonde
$S_{21m}$	Coefficient de transmission entre l'AUT et la sonde
$S_{svd}$	Matrice diagonale utilisée dans la technique SVD
$SNR$	Rapport signal sur bruit
$\sigma$	Conductivité
$U_{svd}$	Matrice orthogonale utilisée dans la technique SVD

$V_{bruit}$	Vecteur tension de sonde bruitée
$V_d$	Vecteur tension de sonde mesurée à une distance $d$
$V_l$	Vecteur tension de sonde mesurée aux bornes du dipôle
$V_m$	Vecteur source de tension sur les dipôles magnétiques
$V_p$	Source de tension sur le dipôle électrique
$V_{prb}$	Vecteur tension de sonde (aussi appelé mesures en champ proche)
$V_{svd}$	Matrice orthogonale utilisée dans la technique SVD
$W_n$	Fonction poids
$y_0$	Distance entre le plan de mesure et l'AUT
$Z$	Matrice d'impédance mutuelle
$Z_{ab}$	Impédance mutuelle entre un dipôle électrique et un monopôle magnétique
$Z_d$	Matrice d'impédance calculée à une distance $d$ entre le plan de mesure et l'AUT
$Z_{m/p}$	Vecteur d'interaction entre les dipôles magnétiques et la sonde
$Z_{m/m}$	Matrice d'interaction entre les dipôles magnétiques
$Z_{p/p}$	Impédance propre ( <i>self impedance</i> ) de la sonde
$Z'_{p/p}$	Impédance d'entrée de la sonde avec la charge

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Exemple de performances de calcul d'impédance donné par <i>gprof</i> lors du calcul des courants sur une antenne <i>patch</i> donnée dans [12]. . . . .	30
4.1	Largeurs à mi-puissance dans différents plans, d'après la Figure 4.12. . . . .	80
6.1	Valeurs de $(a)\lambda_{min\ GCV}$ et $(b)\lambda_{min\ \varepsilon}$ pour différents bruits et différentes valeurs de surdimensionnement. Le nombre de coefficients sources in- connus est de 400. . . . .	113
6.2	Comparaison entre les niveaux d'erreur relative $\varepsilon$ sur la solution $I$ entre les 2 méthodes. . . . .	117
6.3	Valeurs de $(a)\lambda_{min\ GCV}$ et $(b)\lambda_{min\ \varepsilon}$ pour différents bruits et différentes valeurs de surdimensionnements. Le nombre de coefficients sources inconnus est de 400. . . . .	120
6.4	Comparaison de l'erreur sur le champ lointain $\varepsilon$ avec et sans régulari- sation. . . . .	126
C.1	Précision numérique et temps de calcul entre les méthodes de calcul de la fonction $\text{Exp}[z]$ . . . . .	170

## LISTE DES FIGURES

1	Différentes méthodes de calcul pour déterminer la distribution des courants et le champ lointain. . . . .	2
1.1	Fil de conductivité $\sigma$ dans l'espace vide . . . . .	11
1.2	Fil de géométrie arbitraire. . . . .	12
1.3	(a) Fonction sinusoïdale par bout. (b) Ensemble de fonctions sinusoïdales par bout se chevauchant . . . . .	13
1.4	Circuit électrique équivalent de la sonde dipôle avec une charge. . . .	18
1.5	Schéma de principe du programme Slot. À partir des amplitudes des courants sur les dipôles magnétiques fictifs, on peut déterminer les champs proches et lointains. . . . .	22
1.6	Diagramme fonctionnel de l'algorithme général du programme Slot . . .	23
1.7	Diagramme fonctionnel du programme Slot. . . . .	24
2.1	Exemple de performances en temps de calcul de l'impédance en fonction de la distance $y_0$ entre le plan de mesure contenant la sonde et le plan de l'antenne sous test et $l_{mag}$ , longueur des dipôles magnétiques. Le temps correspond à 100 calculs d'impédance. . . . .	31
2.2	Géométrie du problème : dipôle électrique et monopôle magnétique dans le formalisme de Laurin [12] . . . . .	33

2.3	Système de coordonnées utilisé dans le formalisme de Liu et Balanis [14]. . . . .	38
2.4	Impédance $Z_{ab}$ entre les dipôles exprimée sous forme de la somme des impédances des monopôles. Les extrémités segments sont formées des coordonnées des points $a, b, c, d, e, f$ . . . . .	43
2.5	Couplage entre un dipôle magnétique et un dipôle électrique dans le référentiel de prises de mesures. La position de couplage maximum constitue la borne supérieure de l'erreur absolue. . . . .	47
2.6	Erreur relative sur l'approximation du champ H constant pour différentes longueurs de monopôles magnétiques ( $l_{mag}$ appelé $l$ dans ce formalisme) et différentes distances $y_0$ (monopôles à monopôles) projetées sur l'axe des $y$ . La longueur de la sonde est $\lambda/100$ . . . . .	48
2.7	Performances en temps pour 100 calculs de l'impédance en fonction de la distance ( $y_0$ ) et de longueur des dipôles magnétiques ( $l_{mag}$ ). Le couplage est maximum et la longueur de la sonde est de $\lambda/100$ . . . . .	51
2.8	Diagramme de l'algorithme hybride de calcul de l'impédance retenu .	53
2.9	Détail du diagramme de calcul de l'impédance par la méthode Balanis. Les noms en italique font référence aux sous-routines . . . . .	54

2.10	Erreur relative entre la méthode hybride et la méthode de calcul par quadrature pour différentes longueurs de monopôles magnétiques ( $l_{mag}$ appelé $l$ dans ce formalisme) et différentes distances $y_0$ (monopôles à monopôles). La longueur de la sonde est $\lambda/100$ . Le seuil d'erreur acceptable pour basculer en mode approximatif a été fixé à $10^{-3}$ . . . .	55
2.11	Comparaison entre les performances données par la méthode numérique par quadrature de Gauss ( $Zab_{quad}$ ) et la méthode hybride en fonction de la distance ( $y_0$ ) et de longueur des dipôles magnétiques ( $l_{mag}$ ). Le couplage est maximum et la longueur de la sonde est de $\lambda/100$ . Les irrégularités sont liées à la nature multi-tâches du système <i>Unix</i> . . . . .	56
3.1	(a) Table de mesures en champ proche fabriquée au laboratoire du Poly-Grames. (b) Agrandissement sur la sonde de mesure et l'antenne sous test. . . . .	61
3.2	Schéma de la table de mesures en champ proche . . . . .	62
3.3	Schéma de la sonde dipôle. . . . .	63
3.4	Photographie de la sonde dipôle avec et sans gaine absorbante avec circuit hybride à 2,45 GHz à gauche et 5GHz à droite. . . . .	64

4.1	Champ lointain mesuré dans le plan $xz$ d'antennes fente ( $\lambda/2 \times 0,1\lambda$ ) placées sur un plan de dimensions finies. Hauteur $H$ du plan de masse : cas (a) $H = \lambda/2$ , cas (b) $H = 2,75\lambda$ . D'après Krauss [11]. . . . .	68
4.2	Dimensions de l'antenne fente alimentée par micro-ruban. . . . .	69
4.3	Mesures en champ proche $V_l$ de l'antenne fente à une fréquence de 2,45GHz ( $\lambda = 12,24cm$ ) pour deux orientations de sonde (a) $\phi = 45^\circ$ (b) $\phi = -45^\circ$ . La sonde est placée à une distance de $2mm$ de l'antenne sous test ( $0,016\lambda$ ). . . . .	70
4.4	Maillage de la fente. Une grille de $8 \times 8$ forme un total de 207 dipôles. . . . .	71
4.5	Courants magnétiques autour de la fente calculés à partir des mesures en champ proche . . . . .	72
4.6	Diagramme de champ lointain mesurés et recalculés par <i>Slot</i> ( $f=2,45GHz$ ). $ E_\theta $ mesuré dans le plan $\mathbf{E}$ . . . . .	73
4.7	Principe de fonctionnement de l'antenne fente couplée par ligne co- planare. Configuration du champ électrique et magnétique dans la région de couplage, d'après Garcia [23]. . . . .	74
4.8	Dimensions de l'antenne fente couplée par ligne coplanare . . . . .	75
4.9	Mesures en champ proche $V_l$ de l'antenne à une fréquence de 2,45GHz ( $\lambda = 12,24cm$ ), selon deux orientations (a) $\phi = 90^\circ$ et (b) $\phi = 0^\circ$ . . . . .	77



4.10 (a) Moyenne du module des mesures en champ proche dans les 2 orientations. (b) Les courants magnétiques autour de la fente sont calculés à partir des mesures en champ proche. . . . .	78
4.11 Plans <b>E</b> et <b>H</b> de l'antenne fente couplée par guide d'onde coplanaire.	79
4.12 Diagrammes de champ lointain mesurés et recalculés par <i>Slot</i> ( $f=2,45\text{GHz}$ ). (a) $ E_\phi $ mesuré dans le plan <b>H</b> . (b) $ E_\theta $ mesuré dans le plan <b>E</b> . . . .	81
4.13 Schéma montrant quelques calculs de diffraction. La diffraction simple et la diffraction double sur deux bords parallèles sont calculées entre autre (traits plains), mais pas la double diffraction sur deux bords non-parallèles (traits pointillés). . . . .	82
5.1 (a) modèle de l'AUT sans sonde. (b) Le système équivalent sans sonde. Le point $P$ où on reçoit le signal est remplacé par la charge adaptée. (c) modèle de l'AUT avec une sonde dipôle au point $P$ . (d) Le système équivalent avec sonde. La charge adaptée est maintenant un terme de réflexion vers l'AUT. . . . .	91
5.2 Le rapport $K$ pour différentes positions de la sonde au dessus de l'antenne sous test (antenne fente) . . . . .	95
5.3 $S_{21m}$ coefficient de transmission mesuré dans le cas (a) avec absorbant sur la gaine extérieure du fil coaxial et dans le cas (b) sans absorbant, pour différentes positions de la sonde au dessus de l'antenne sous test (antenne fente). . . . .	97

5.4	$S_{11m}$ coefficient de réflexion mesuré pour différentes positions de la sonde au dessus de l'antenne sous test (antenne fente). . . . .	98
5.5	(a) sonde dipôle avec dipôle est remplacée par (b) un modèle équivalent (sonde idéale sans câble). Le câble est remplacé par une résistance de $100\Omega$ . La sonde idéale est posée sur un bloc de mousse. . . .	99
5.6	Analyse des ondes réfléchies entre l'antenne sous test et la sonde. Seules les ondes réfléchies de premier ordre sont représentées. On néglige les réflexions multiples d'ordre supérieur. . . . .	100
5.7	$ E $ 5mm au dessus de l'antenne sous test. (a) valeurs recalculées avec Slot. (b) valeurs recalculées avec HSFSS. . . . .	102
6.1	Erreur sur les courants pour différents niveaux de bruit et différents rapports de <i>surdimensionnement</i> . . . . .	108
6.2	(a) Exemple de courbe représentant la fonction GCV (bruit blanc de SNR=10dB et un surdimensionnement de $400 \times 676$ ) pour différentes valeurs de $\lambda$ , le paramètre de régularisation, ici $\lambda_{min\ GCV} = 0,31$ . (b) Courbe de l'erreur réelle pour différentes valeurs de $\lambda$ , ici $\lambda_{min\ \epsilon} = 0,34$ .	115
6.3	Erreur sur les courants pour différents niveaux de bruit et différents rapports de <i>surdimensionnement</i> après régularisation avec $\lambda_{min\ GCV}$ . . . .	116
6.4	Comparaison entre la technique d'inversion SVD (a) et la technique de régularisation utilisant $\lambda_{min\ GCV}$ (b) montrées sur une même échelle.	117

- 6.5 Erreur sur les courants pour différents niveaux de bruit et différents rapports de *surdimensionnement* après régularisation avec  $\lambda_{min} \varepsilon$ . . . 118
- 6.6 Erreur sur les courants pour différentes hauteurs de la sonde et différents rapports de *surdimensionnement* après régularisation avec  $\lambda_{min}$ .  
Une erreur  $\Delta d$  est introduite : les mesures sont effectuées à une hauteur de  $5mm + \Delta d$ . Les courbes de surdimensionnement  $400 \times 676$ ,  $400 \times 900$ ,  $400 \times 1600$  sont superposées donc indistinguables. . . . . 121
- 6.7 Schéma du maillage disposé sur l'antenne. Les dipôles qui longent la ligne de transmission sont confondus avec celle-ci. . . . . 124
- 6.8 Technique de régularisation appliquée sur une antenne fente alimentée par une ligne de transmission coplanaire, les courants  $I_m$  sont représentés par les courbes. (a) sans régularisation, (b) avec régularisation.  
On montre aussi le champ proche mesuré dans le plan  $xy$ . . . . . 125
- 6.9 Ligne de transmission coplanaire avec coude. Le coude introduit une différence de parcours. Les amplitudes des courants  $I_1$  et  $I_2$  ne sont plus égales après le coude. . . . . 127
- 6.10 Courants mode commun  $I_c$  et mode différentiel  $I_d$ , le long de la ligne de transmission coplanaire, après régularisation . . . . . 128

6.11 (a) Solution après inversion avec SVD. Cette solution souffre des problèmes de conditionnement de matrice. (b) Mesures en champ proche et solution après régularisation ( $f=2,45\text{GHz}$ ). La solution est en accord avec les mesures en champ proche. . . . .	129
6.12 Distribution de courants le long d'une fente rayonnante. Cas théorique (a), cas pratiques (b) et (c). . . . .	130
6.13 Les dipôles sont disposés sur la fente en formant des groupes. Les dipôles d'un même groupe $G_n$ sont colinéaires. . . . .	131
6.14 Schéma de l'antenne fente à trois éléments d'après [23]. . . . .	134
6.15 Mesures en champ proche (distance de l'antenne de 2mm). L'orientation de la sonde est de $45^\circ$ et le nombre de points de mesure est de 2400 ( $40 \times 60$ ). . . . .	135
6.16 Maillage sur l'antenne fente. Chaque ligne représente un groupe de dipôles $G_n$ . . . . .	136
6.17 (a) Solution avec régularisation utilisant la matrice identité. (b) Solution avec régularisation utilisant la matrice des différences premières. Il y a 284 dipôles disposés en 28 groupes. . . . .	137
A.1 Géométrie du nouveau problème : dipôle électrique et monopôle magnétique pour le développement analytique . . . . .	152

B.1	Référentiel défini par Richmond. Il suffit d'effectuer un changement de variables pour obtenir la Figure 2.3. . . . .	158
C.1	Configuration des monopôles donnant une valeur maximale de $\delta$ . . .	168
C.2	Découpage du domaine d'intégration avec $(u + j \delta) \in \mathbb{C}$ . . . . .	168

**LISTE DES ANNEXES**

<b>ANNEXE A : Développement analytique du calcul de l'impédance à partir de l'expression de Laurin . . . . .</b>	<b>151</b>
<b>ANNEXE B : Passage d'un référentiel orthonormal quelconque au système de coordonnées défini par Richmond . . . . .</b>	<b>158</b>
<b>ANNEXE C : Présentation des différentes méthodes numériques de calcul de l'intégrale de l'exponentielle <math>\text{Exp}[z]</math> . . . . .</b>	<b>161</b>

## INTRODUCTION

### 0.1 Généralités

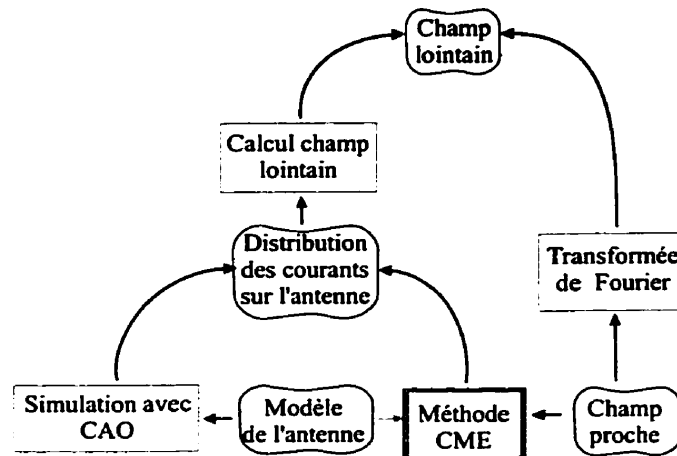
Le présent Mémoire de Maîtrise résume les travaux réalisés dans le but d'améliorer une technique de modélisation des champs électromagnétiques émis par une structure rayonnante aussi bien à très faible distance (champ proche) qu'à grande distance (champ lointain).

### 0.2 Intérêt des mesures en champ proche

Les mesures en champ proche consistent à mesurer le champ électromagnétique à de très faibles distances d'un corps rayonnant. D'une manière générale, ces mesures peuvent fournir diverses informations sur la structure étudiée : les courants dans la structure, l'imagerie des matériaux constituant le corps rayonnant et les rayonnements en champ lointain. Les techniques de mesures en champ proche sont utiles en antenne, en compatibilité électromagnétique ou même dans le domaine médical. Dans ces champs d'étude, il existe de nombreux exemples d'applications : déterminer le diagramme de rayonnement en champ lointain d'une antenne sans l'utilisation d'une chambre anéchoïde, déterminer les points de courants élevés sur un circuit imprimé, déterminer le déphasage d'horloge (*skew*) entre deux fils électriques dans un circuit VLSI, effectuer la cartographie des tissus humains à l'aide d'informations sur la propagation des micro-ondes dans le milieu [7] [22].

### 0.3 Approche générale

Dans ce domaine, différentes approches sont possibles. Les deux plus couramment utilisées sont, l'analyse et la modélisation par transformée de Fourier et la méthode des **Courants Magnétiques Équivalents** (CME). Dans le cadre de ce travail nous nous sommes proposés de valider et d'améliorer cette dernière. Outre ces méthodes basées sur des mesures de champ, il est possible de calculer le champ lointain au moyen de logiciels de simulation CAO basés sur les caractéristiques de conception de l'antenne. Ces différentes méthodes permettant de calculer les caractéristiques de rayonnement de l'antenne sont schématisées à la Figure 1.



**Figure 1:** Différentes méthodes de calcul pour déterminer la distribution des courants et le champ lointain.



## 0.4 Historique des mesures en champ proche

Les premiers essais de mesures en champ proche remontent aux années 1950. Dans les années 1970, Joy et Paris [8] ont développé une technique (utilisant la transformée de Fourier) de mesure en champ proche pour la détermination du diagramme de rayonnement en champ lointain de l'antenne. Par la suite vers 1990, Petre et Sarkar [17] ont développé une technique appelée *courants électriques/magnétiques équivalents* qui offre des avantages supplémentaires par rapport aux méthodes conventionnelles. Parce que très prometteuse, cette méthode est encore aujourd'hui, l'objet de nombreuses études.

## 0.5 Description de la méthode des courants magnétiques équivalents

Cette méthode peut se résumer comme suit :

- modéliser la structure rayonnante plane (circuits, antennes, etc.) sous la forme d'un réseau 2D de dipôles représentatifs,
- calculer le champ lointain produit par ce réseau de dipôles fictifs.

Pour établir le réseau de dipôles représentatif, on procède comme suit :

- on balaie la surface étudiée à faible distance au moyen d'une sonde.
- on mesure et on enregistre les variations du champ proche,
- on détermine à l'aide d'un modèle mathématique le réseau de dipôles repré-

sentatifs, qui produirait les mêmes variations du champ avec une précision suffisante.

Le champ lointain est alors établi, par calcul, sur la base de ce modèle, au moyen des équations de champ lointain usuelles.

## **0.6 Considérations pratiques**

Contrairement aux courants électriques, les courants magnétiques sont un artifice de calcul sans support physique réel. Cependant, le concept de courant magnétique permet de modéliser certains types de surface plus aisément que les courants électriques. En effet, là où certaines géométries du circuit électrique nécessiteraient une très grande quantité d'éléments discrets de courants électriques, un nombre restreint d'éléments discrets de courants magnétiques suffit.

Idéalement, les courants magnétiques devraient constituer toute l'information requise pour définir la structure rayonnante, pour pouvoir retrouver le champ proche à n'importe quelle distance de même que le champ lointain (si on connaît les effets de diffraction). Ils permettent également de déterminer les endroits où les courants sont élevés, et donc d'aider l'ingénieur de test à déceler les erreurs de conception ou de fabrication.

Les mesures en champ proche se font à l'aide d'un montage expérimental capable de les mesurer et de les enregistrer. Le système de mesure en champ proche réalisé au laboratoire du Poly-Grames nécessite les instruments suivants : une table de mesure

sur lequel repose un bras mécanique (portant la sonde) contrôlé par ordinateur, un analyseur de réseau aussi contrôlé par ordinateur permettant d'afficher les lectures sur les champs proches données par la sonde. Ce système permet de sauvegarder la cartographie des mesures en champ proche effectuée sur une surface plane ainsi que tous les autres paramètres relatifs à la prise de mesure. Les mesures sauvegardées peuvent ensuite être traitées pour en extraire les courants magnétiques sur la surface de l'antenne en utilisant le programme informatique *Slot*. Le programme *Slot* est utilisé pour calculer les coefficients des courants sources.

## 0.7 Avantages

La méthode des courants magnétiques équivalents offre plusieurs avantages par rapport aux autres méthodes. En effet, elle permet d'éliminer le problème d'échantillonnage et l'effet de fenêtrage inhérents aux mesures utilisant la méthode de transformée de Fourier. D'une part, du fait qu'elle utilise un espace d'échantillonnage réduit et qu'elle ne nécessite pas de chambre anéchoïde, cette technique nécessite un appareillage moins coûteux. D'autre part, elle est plus précise pour déterminer le diagramme de rayonnement d'antennes de petite dimension et de faible directivité par rapport aux autres méthodes standard comme la méthode de transformée de Fourier [12]. La dégradation du diagramme de rayonnement causée par les dimensions finies du plan de masse peut être significative. Aucun outil CAO sur le marché utilisant la méthode des moments comme technique de solution ne modélise ce phénomène

de façon rigoureuse. Aussi comme il a été mentionné plus haut, il est possible de déterminer les courants à la surface de la structure étudiée.

## **0.8 Problématique**

Cette méthode requiert un long temps de calcul par rapport aux autres méthodes de mesure en champ proche, cela constitue une des principales limites de cette technique. Un autre point important est l'effet de la perturbation de la sonde. L'élément rayonnant sous test est perturbé par la proximité de la sonde. Il convient donc de s'assurer que l'influence de la sonde est minime. Sa taille doit être minimale pour perturber le moins possible le circuit sous test, et en même temps, chercher à capter le plus grand signal possible. La troisième difficulté se situe au niveau de la sensibilité de la solution aux sources de bruit et au problème de mauvais conditionnement de matrice. Ce dernier type de difficulté apparaît dans la plupart des problèmes de discrétisation de l'équation intégrale.

## **0.9 Objectifs**

Compte tenu des différents aspects mentionnés plus haut, les objectifs de ce travail de maîtrise portent en cinq points : (a) l'amélioration des performances du programme de traitement de mesures, (b) la réalisation d'un montage expérimental permettant d'effectuer les mesures en champ proche, (c) la validation expérimentale de la méthode grâce à deux exemples d'application permettant de comparer les ré-

sultats calculés et les résultats mesurés, (d) la compréhension des différentes sources d'erreur et l'effet de la perturbation de la sonde, et enfin (e) le traitement des mesures et des résultats afin d'éliminer certaines sources de bruits ainsi que les problèmes de conditionnement de matrice.

## **0.10 Structure du mémoire**

À cette fin, ce mémoire est partagé en six chapitres. Le premier consiste en un rappel sur la méthode des moments et des courants magnétiques équivalents. Il explique également le fonctionnement du programme de traitement des données. Le second chapitre présente un algorithme qui permet de diminuer le temps de calcul des courants magnétiques. Le troisième présente le montage expérimental, c'est-à-dire la table de mesure en champ proche, la sonde, les appareils de mesures et d'acquisition de données et la chambre anéchoïde utilisée pour comparer les diagrammes de rayonnement en champ lointain. Le quatrième montre la validation des résultats obtenus par la méthode des courants magnétiques équivalents et la comparaison des calculs de champ lointain avec les résultats obtenus dans la chambre anéchoïde. Le cinquième chapitre énonce les différentes sources d'erreur lors de la prise de mesures et montre que l'effet de la perturbation de la sonde fabriquée dans le cadre de ce travail peut être considéré comme négligeable. Le sixième chapitre présente une technique de traitement de données qui permet de diminuer l'effet des différentes sources de bruit ainsi que l'effet du mauvais conditionnement de matrice. Enfin, le dernier

chapitre permet de conclure sur les performances de cette technique et d'identifier les recherches possibles qui viseraient à améliorer la méthode.

## CHAPITRE 1

### TECHNIQUE DE MESURE EN CHAMP PROCHE À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES COURANTS MAGNÉTIQUES ÉQUIVALENTS

#### 1.1 Origine de la méthode CME

La méthode des CME est inspirée de la méthode des moments. Cette méthode est employée pour déterminer la distribution de courants sources d'un système rayonnant ouvert. Nous présentons ci-dessous une brève introduction à cette méthode, en vue de faciliter la compréhension de la méthode CME. Ensuite, les fonctionnalités d'un programme informatique permettant d'utiliser les mesures en champ proche pour déterminer les sources magnétiques équivalentes sont présentées.

#### 1.2 La méthode des moments

##### 1.2.1 Équation générale

La méthode des moments est une technique qui consiste à réduire à une forme discrète l'équation intégrale suivante [24] :

$$\int I(z')K(z, z')dz' = -E^i(z) \quad (1.1)$$

La variable  $I(z')$  représente le courant induit sur la surface de la structure,  $K(z, z')$ , le noyau sera défini plus loin et  $-E^i(z)$  est le champ incident. La somme d'un nombre fini d'éléments est écrite de manière équivalente en un système d'équations linéaires dont les courants sur chaque élément rayonnant sont les inconnues.

La résolution de cette équation est fastidieuse mais elle peut être systématique et se prête donc bien aux différentes méthodes numériques informatisées. Ci-après, les différentes équations fondamentales de la méthode sont explicitées.

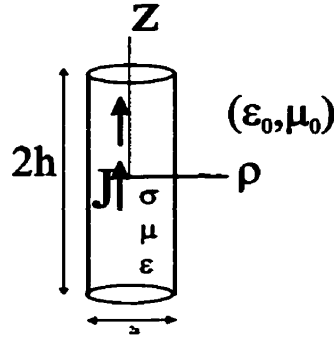
### 1.2.2 La méthode des moments et les résidus pondérés

On présente le cheminement qui permet de dériver une version discrète de l'équation intégrale 1.1. Il est montré dans la littérature (par exemple [24]) traitant de la méthode des moments comment l'équation 1.1 peut s'écrire sous forme discrète de façon approximative :

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = V_m \quad (1.2)$$

où  $Z_{mn}$  est la matrice d'impédance généralisée,  $I_n$  le vecteur des courants inconnues et  $V_m$  le vecteur des sources de tension. la définition de ces différents termes est donnée plus loin. Une démonstration synthétique montrant l'équivalence entre l'équation 1.1 et l'équation 1.2 sera donnée dans cette section. Soit un bout de fil droit (tel que montré à la Figure 1.1), la somme résiduelle  $R$  est la somme des composantes tangentielles des champs incidents et diffractés :





**Figure 1.1:** Fil de conductivité  $\sigma$  dans l'espace vide

$$R = E_{tan}^s + E_{tan}^i \quad (1.3)$$

En utilisant des fonctions poids de type Delta Dirac, cette expression peut s'écrire :

$$R(z) = \sum_{n=1}^N I_n f(z, z'_n) + E_z^i \quad (1.4)$$

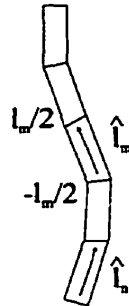
Dans la méthode des résidus pondérés, les coefficients  $I_n$  sont déterminés afin que le résidu soit nul en moyenne. Ainsi, dans le problème du fil montré à la Figure 1.1 où on considère un conducteur parfait, ( $\sigma$  infinie) les intégrales pondérées sont nulles et peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\int W_m(z) R(z) dz = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.5)$$

où  $W_m(z)$  est appelée la *fonction poids* ou *fonction test*. En substituant l'équation 1.4 dans l'équation 1.5, on obtient :

$$\int_{-L/2}^{L/2} W_m(z) \sum_{n=1}^N I_n f(z, z'_m) dz + \int_{L/2}^{L/2} W_m(z) E_z^i(z) dz = 0$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.6)$$

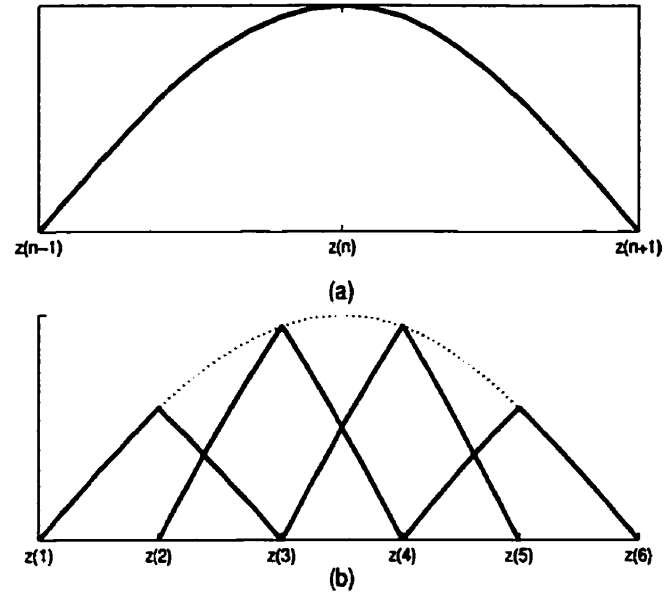


**Figure 1.2:** Fil de géométrie arbitraire.

En considérant un problème plus général que celui du fil rectiligne comme celui d'un fil de géométrie arbitraire découpé en éléments de dimension  $l_m$  (comme montré à la Figure 1.2), on peut réécrire cette même équation sous la forme :

$$\int_{-l_m/2}^{l_m/2} \overline{W_m}(l) \cdot \overline{E^s}(l) dl + \int_{-l_m/2}^{l_m/2} \overline{W_m}(l) \cdot \overline{E^i}(l) dl = 0$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.7)$$



**Figure 1.3:** (a) Fonction sinusoïdale par bout. (b) Ensemble de fonctions sinusoïdales par bout se chevauchant

Laquelle peut s'écrire de manière similaire à l'équation 1.2 si on définit :

$$\begin{aligned}
 Z_{mn} &= \int_{-l_m/2}^{l_m/2} \overline{f(l, l'_m)} \cdot \overline{E_n^s(l)} \, dl \\
 V_m &= \int_{-l_m/2}^{l_m/2} \overline{W_m(l)} \cdot \overline{E^i(l)} \, dl
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Nous avons brièvement dérivé l'équation 1.2. Celle-ci sera utilisée pour expliquer le principe de la méthode des CME. Avant cela, la fonction de poids  $W_m$  sera définie comme montré ci-après.

### 1.2.3 La méthode de Garlekin

La méthode de Garlekin consiste à choisir le même ensemble de fonctions pour les fonctions de base  $f_n$  et les fonctions poids  $W_n$ . Une des manières les plus efficaces (en terme de convergence) pour déterminer la distribution de courants (figure 1.3 a) avec la méthode des moments consiste à utiliser des fonctions de base dont l'allure s'apparente à celle de la distribution finale de courant sur un bout de fil. Cette fonction de base  $f$  appelée *sinusoïdale par bout* (*piecewise sinusoidal*) est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} f(z) &= \hat{z} \frac{\sin\beta(z - z_{n-1})}{\sin\beta(z_n - z_{n-1})} & z_{n-1} \leq z \leq z_n \\ f(z) &= \hat{z} \frac{\sin\beta(z_{n+1} - z)}{\sin\beta(z_{n+1} - z_n)} & z_n \leq z \leq z_{n+1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

En accord avec la Figure 1.1, cette expression suppose des bouts de fils orientés selon l'axe des  $z$ . Cette fonction est tracée à la Figure 1.3 (a).

Un exemple d'approximation d'une distribution de courant par un ensemble de fonctions sinusoïdales est montré à la Figure 1.3 (b). Sur la Figure 1.3 (b), chaque segment  $[z(n), z(n+1)]$  contient deux morceaux de fonction sinusoïdale par bout à l'exception des extrémités ( $z(1)$  et  $z(6)$ ) qui ne sont connectés qu'à une seule fonction de base (permettant de forcer les conditions frontières). Cette manière de définir les courants sources inconnus est en accord avec la loi des noeuds de Kirchoff (la somme algébrique des courants entrant et sortant dans un noeud est nulle). Ainsi, d'après

la loi de Kirchoff, dans un cas plus général où l'on a un noeud connecté à  $N$  autres noeuds,  $N - 1$  fonctions de base sont nécessaires et suffisantes pour trouver les courants sur chacun des  $N$  segments reliant ce noeud aux autres.

Cette fonction  $f$  de base sera appliquée sur chaque courant source inconnu. L'expérience a montré que l'utilisation de fonctions *tests sinusoïdales par bout* permet d'obtenir des procédures dont la convergence numérique est plus rapide et plus précise qu'avec d'autres types de fonctions de base, telles celles liées à la méthode du *point matching*.

### **1.3 La méthode des moments comme fondement de la technique de CME**

Sarkar et al. [17] ont développé dans les années 1980 la méthode CME qui permet de calculer les courants sources à partir d'une approche inspirée de la méthode des moments. Le principe de cette méthode ainsi que le programme informatique développé par Laurin [12] qui permet de déterminer les courants sources sont détaillés ci-dessous.

#### **1.3.1 Description de la méthode CME**

Tel que mentionné précédemment, la méthode des moments consiste à représenter sous forme discrétisée l'équation intégrale 1.1, c'est-à-dire à remplacer la distribution de courant par une somme finie de fonctions de base (appelées ici des dipôles). L'approche de la CME est semblable, à la différence qu'il faut également prendre

en compte l'interaction de l'antenne sous test (AUT) étudiée avec la sonde dont on connaît la forme géométrique. On supposera ici que la sonde est suffisamment petite et qu'elle peut ainsi être modélisée par une seule fonction de base de type dipôle électrique. La généralisation à un cas arbitraire de sonde est possible mais ne sera pas présentée ici pour plus de concision. À partir de l'équation 1.2, le système matriciel comprenant la sonde à une position fixe et l'antenne sous test peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{m/m} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Z_{m/p} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{m/p} \\ Z'_{p/p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m \\ V_p \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

où  $[Z_{m/m}]$  représente la matrice d'interaction entre les dipôles magnétiques,  $[Z_{m/p}]$  le vecteur d'interaction entre les dipôles magnétiques et la sonde (*probe*), et  $[Z'_{p/p}]$  est un scalaire qui représente l'impédance d'entrée de la sonde. Le vecteur  $[I_m]$  représente les coefficients des courants magnétiques sources dans l'antenne sous test et le scalaire  $[I_p]$  le coefficient des courants électriques dans la sonde. Le vecteur  $[V_m]$  représente les sources de tensions aux bornes des dipôles magnétiques sources et le scalaire  $[V_p]$  la source de tension aux bornes de la sonde. Notons que les unités relatives aux variables de l'équation 1.10 ne sont pas cohérentes, puisqu'on nomme matrice d'impédance (multipliée par les courants magnétiques) ce qui devrait s'appeler matrice

d'admittance. Mais pour des fins de clarté, nous conserverons ce formalisme souvent utilisé dans la littérature.

Tout d'abord, considérons le système linéaire du haut de l'équation 1.10. Si on néglige l'effet de la sonde sur l'antenne, l'expression :

$$[Z_{m/m}][I_m] + [Z_{m/p}][I_p] = [V_m] \quad (1.11)$$

peut être approximée par,

$$[Z_{m/m}][I_m] \simeq [V_m] \quad (1.12)$$

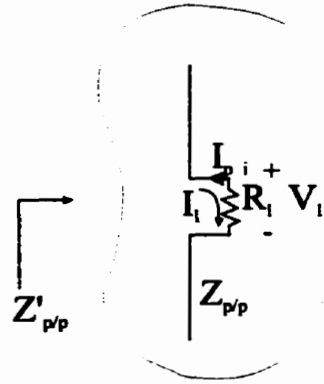
En d'autres termes, pour toute position de sonde  $i$  considérée, le courant de sonde  $[I_p]$  a un effet négligeable sur le système physique auquel sont associés les courants magnétiques équivalents  $[I_m]$ .

Considérons maintenant le système linéaire du bas de l'équation 1.10. Celui-ci nous permettra de calculer  $[I_m]$  à partir des mesures en champ proche  $[V_i]$  :

$$[Z_{m/p}][I_m] + [Z'_{p/p}][I_p] = [V_p] \quad (1.13)$$

En effet, dans la pratique, on ne mesure pas directement  $[I_p]$ , mais plutôt la tension  $[V_i]$  aux bornes de la résistance  $R_i$  tel que montré à la Figure 1.4. Nous allons donc tout d'abord dériver des expressions qui nous permettront de faire le lien entre la

tension induite aux bornes de la sonde  $[V_l]$  et l'équation 1.13. Pour cela, considérons le circuit électrique équivalent de la sonde montré à la Figure 1.4.



**Figure 1.4:** Circuit électrique équivalent de la sonde dipôle avec une charge.

Soit une sonde avec une charge  $R_l$  (typiquement  $50\Omega$ ), et la tension à la charge  $V_l$  telles que montrées à la Figure 1.4. D'après cette figure et sachant que  $Z'_{p/p}$  est l'impédance d'entrée de la sonde, on déduit les équations suivantes :

$$Z'_{p/p} = Z_{p/p} + R_l \quad (1.14)$$

où  $Z_{p/p}$  est l'impédance propre (*self impedance*) de la sonde sans la charge  $R_l$  (dont le calcul est donné dans Krauss eq.10-5-9 et 10-5-10 [11]). Aussi, la loi d'Ohm donne la tension à la charge  $R_l$  :

$$V_l = R_l I_l = -R_l I_{pi} \quad (1.15)$$

Puisqu'il n'y a aucune source sur la sonde ( $[V_p] = 0$ ), l'équation 1.13 peut s'écrire



sous la forme :

$$[Z_{m/p}][I_m] + [Z'_{p/p}][I_p] = 0 \quad (1.16)$$

Après quelques manipulations on peut écrire, à l'aide des équations 1.14, 1.15 et 1.16 :

$$V_l = \frac{R_l}{Z_{p/p} + R_l} [Z_{m/p}]_i [I_m] \quad (1.17)$$

où  $V_l$  représente la tension à la charge de la sonde placée à une position  $i$  donnée. Aussi  $[Z_{m/p}]_i$  est un vecteur ligne représentant les impédances entre les dipôles magnétiques et la sonde au point  $i$ .

En déplaçant la sonde on doit considérer deux cas : celui où la sonde perturbe l'antenne sous test, et celui où la perturbation de la sonde est négligeable.

Dans le premier cas,  $[I_m]$  dépend de la position  $i$  et la méthode des courants magnétiques n'est plus valable. Dans le deuxième cas,  $[I_m]$  est constant pour toute position de la sonde et on peut écrire en répétant  $M$  mesures en différentes positions :

$$\begin{bmatrix} V_{l1} \\ V_{l2} \\ \vdots \\ V_{lM} \end{bmatrix} = \frac{R_l}{Z_{p/p} + R_l} \begin{bmatrix} [Z_{m/p}]_1 \\ [Z_{m/p}]_2 \\ \vdots \\ [Z_{m/p}]_M \end{bmatrix} [I_m] \quad (1.18)$$

Ce système linéaire contient  $N$  coefficients de sources inconnus  $[I_m]$  et  $M$  points de mesure  $[V_l]$ . La matrice  $[Z_{m/p}]_i$  est représentée par une ligne de  $N$  éléments et  $[V_i]$  représente une mesure de tension au  $i$ ème point de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ . L'équation 1.18 sera simplifiée pour plus de clarté et nous l'écrirons à partir de maintenant sous la forme :

$$[V_{prb}] = [Z][I_m] \quad (1.19)$$

où  $[V_{prb}] = [V_l] \frac{Z_{p/p} + R_l}{R_l}$ .

L'hypothèse principale de la méthode des CME consiste à négliger les perturbations de la sonde sur l'antenne sous test, cette hypothèse sera vérifiée ultérieurement. En effet, en théorie, il n'existe aucune solution au système de l'équation 1.19, puisque en bougeant la sonde, on change la distribution des courants dans l'antenne sous test. En pratique, cette perturbation peut être négligée (tel que montré au Chapitre 5) et il est possible de *surdimensionner*<sup>1</sup> le système pour pouvoir l'inverser et déterminer les sources avec un minimum d'erreurs.

L'inversion du système linéaire est effectuée par une décomposition en valeurs singulières (section 1.4.5). Cela permet d'inverser des matrices non carrés tels que le système 1.18, comme nous le verrons plus loin.

Nous allons maintenant étudier le programme *Slot* qui permet de mettre en oeuvre les procédures montrées plus haut.

---

<sup>1</sup>*surdimensionné* : un système qui contient plus de mesures que d'inconnues à déterminer

## 1.4 Description du programme *Slot*

### 1.4.1 Généralités

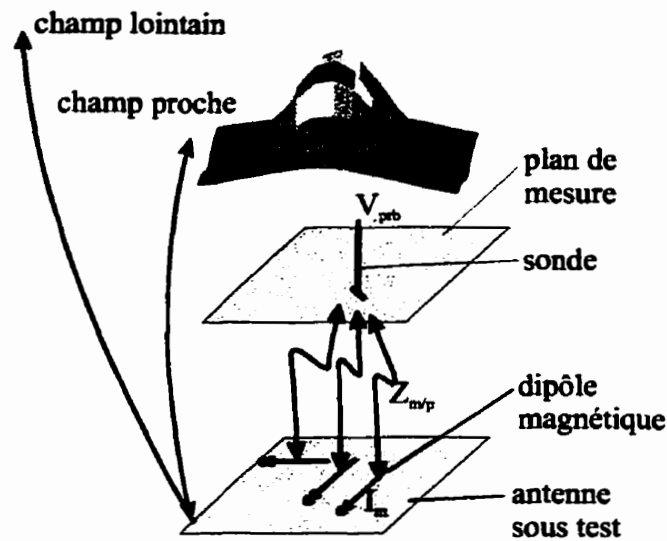
*Slot* est un programme récemment développé par Laurin [12] qui permet de déterminer les coefficients des courants magnétiques sources à partir de mesures en champ proche. Ci-après, le cheminement qui permet de calculer les courants sources à partir des mesures en champ proche est montré. Le calcul numérique du remplissage de la matrice d'impédance mutuelle  $Z$  est montré plus loin, au Chapitre 2.

### 1.4.2 Algorithme du programme

Le programme *Slot* permet principalement de calculer 4 caractéristiques de l'antenne sous test :

- les courants sources  $[I_m]$  à partir des mesures en champ proche  $[V_{prb}]$
- les mesures en champ proche  $[V_{prb}]$  simulées connaissant les courants sources  $[I_m]$
- les composantes des champs proches  $E$  et  $H$  calculées à partir des courants sources  $[I_m]$
- le diagramme de rayonnement en champ lointain de l'antenne sous test connaissant les courants sources  $[I_m]$

Ces différents calculs sont schématisés à la Figure 1.5. Les caractéristiques (courants, mesures en champ proche) sont calculées à partir de l'équation 1.19. Comme déjà

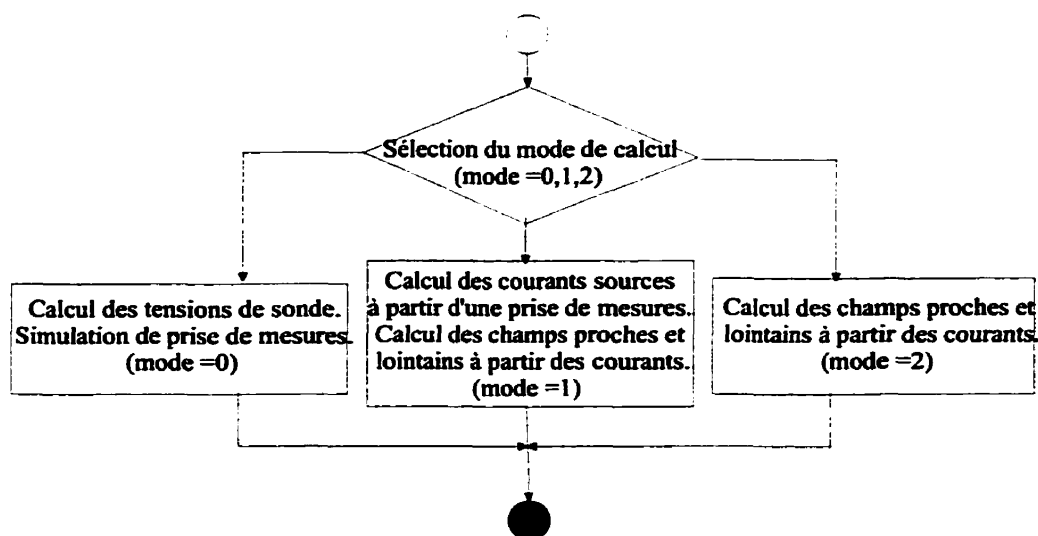


**Figure 1.5:** Schéma de principe du programme Slot. À partir des amplitudes des courants sur les dipôles magnétiques fictifs, on peut déterminer les champs proches et lointains.

mentionné, dans la section précédente, la technique de détermination des courants sources à partir de mesures en champ proche revient à un problème d'inversion de l'équation intégrale. Notons que cette méthode est couramment employée dans d'autres domaines, comme le traitement d'images et nous verrons plus loin qu'il existe plusieurs techniques sophistiquées pour résoudre de tels systèmes d'équations linéaires.

#### 1.4.3 Description détaillée de l'algorithme du programme

Le programme *Slot* (voir Figure 1.6) fonctionne dans trois modes correspondant aux caractéristiques recherchées de l'antenne :



**Figure 1.6:** Diagramme fonctionnel de l'algorithme général du programme Slot

- le mode 0 permet de simuler les tensions de sonde à partir de courants sources connus sur la surface de l'antenne.
- le mode 1 établit le vecteur de coefficients (sur le maillage introduit par l'opérateur) représentatifs du modèle des dipôles. Les courants induits par ces dipôles sont alors calculés par *Slot*. On peut aussi calculer le champ proche et le champ lointain dans ce mode.
- le mode 2 permet de calculer seulement les champs proches et lointains à partir des CME préalablement calculées avec le mode 1.

#### 1.4.4 Détail sur les différents modes de calcul

Ci-après, l'algorithme permettant de déterminer les courants sources à partir de mesures en champ proche est décrit. Le diagramme fonctionnel est illustré à la Figure

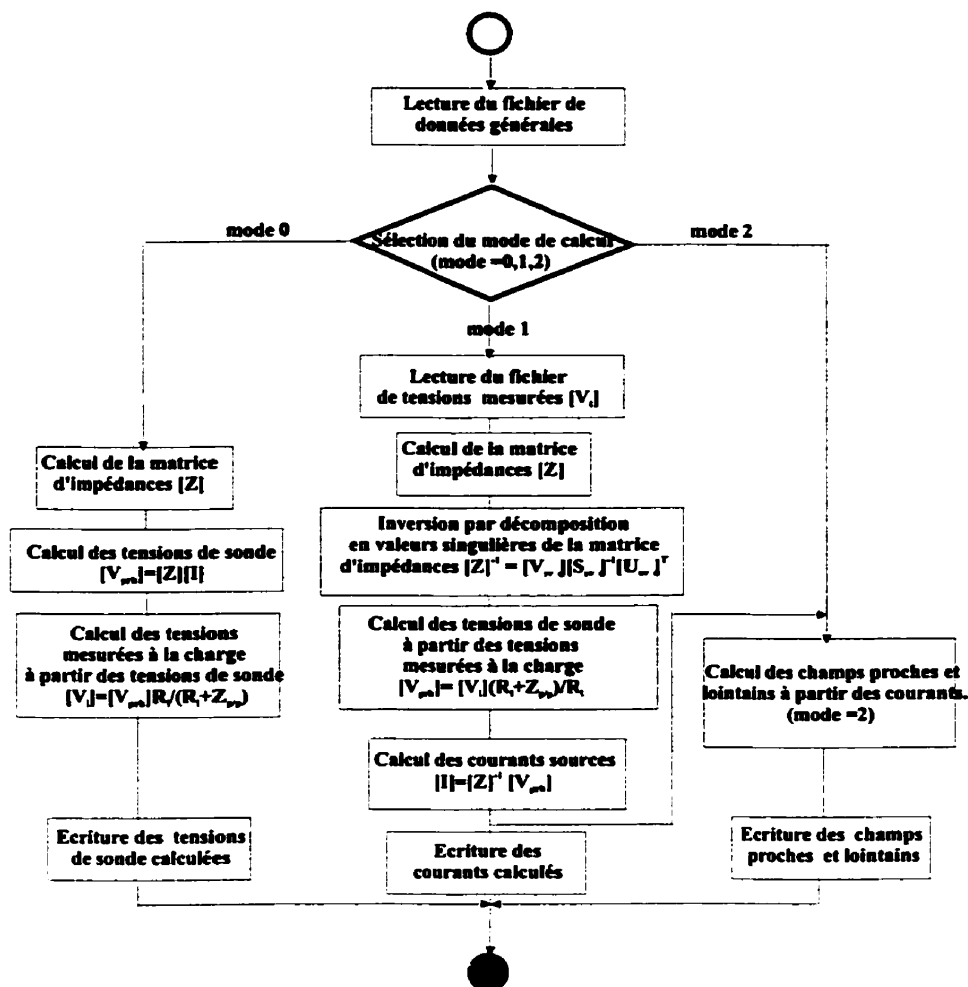


Figure 1.7: Diagramme fonctionnel du programme Slot.

?? . Les étapes de calculs permettant de déterminer les coefficients  $[I_m]$  des courants sources correspondant au mode 1 se décrivent comme suit, conformément au principe déjà décrit à la section 1.3.1.

- lecture des paramètres expérimentaux (rayon de sonde, orientations, fréquence d'opération, etc.),
- lecture des mesures en champ proche  $[V_i]$ ,

- calcul de la matrice d'impédance  $[Z]$  pour chaque position de la sonde et chaque dipôle magnétique disposé sur l'antenne sous test,
- inversion de la matrice par la méthode SVD  $[Z]^{-1} = [U_{svd}][S_{svd}]^{-1}[V_{svd}]^T$ ,
- calcul des tensions de sonde  $[V_{prb}]$  à partir de  $[V_l]$ ,
- calcul des coefficients courants sources  $[I_m] = [Z]^{-1}[V_{prb}]$ .

L'inversion de la matrice d'impédance est explicitée ci-après.

#### 1.4.5 Description de la méthode d'inversion de la matrice $[Z]$ par décomposition en valeurs singulières

Nous montrerons plus loin que l'équation intégrale appartient à la classe de problèmes dits mal posés (*ill-posed problem*). La méthode CME fait aussi partie de cette classe, compte tenu de toutes les sources d'erreur expérimentales s'ajoutant aux problèmes posés par la condition de matrice. En effet à cause des problèmes d'arrondi, certaines lignes du système linéaire deviennent parallèles et le système devient sous-dimensionné avec un nombre infini de solutions. Il existe plusieurs méthodes plus ou moins robustes et complexes pour réduire les effets de conditionnement et les différentes sources d'erreurs expérimentales. Parmi celles-ci, la méthode de décomposition en valeurs singulières permet dans certains cas d'éliminer ce genre de problème.

Cette méthode est bien connue (par exemple [18]) et seul le principe sera décrit

ici. On décompose la matrice à inverser ( $[Z]$ ), en trois matrices :

$$[Z] = [U_{svd}][S_{svd}][V_{svd}^T] \quad (1.20)$$

La technique de décomposition en valeurs singulières repose sur le théorème d'algèbre linéaire suivant (non démontré ici) : *une matrice  $M \times N$   $[Z]$  dont le nombre de rangées  $M$  est plus grand ou égal au nombre de colonnes  $N$ , peut être écrite comme le produit d'une matrice  $[U_{svd}]$   $M \times N$  (dont les colonnes sont orthogonales), une matrice  $[S_{svd}]$   $N \times N$  (dont seuls les éléments diagonaux sont non-nuls, les valeurs singulières) et la transposée d'une matrice  $[V_{svd}]$   $N \times N$ . Les valeurs singulières de la matrice  $[S_{svd}]$  sont ordonnées en ordre décroissant. La méthode SVD (*Singular Value Decomposition*) permet de détecter des problèmes causés par un mauvais conditionnement de la matrice  $[Z]$  au moyen du calcul de la *condition*. Celle-ci est définie par le rapport entre la valeur du plus grand élément de la matrice  $[S_{svd}]$  et celle du plus petit. Une grande valeur de ce paramètre, par exemple  $10^{10}$ , indique que le système est mal posé. Cependant nous n'avons pas utilisé ce critère dans le cadre de nos travaux, nous avons utilisé des techniques de régularisation pour *corriger* ces problèmes.*

Le programme *Slot* utilise la technique SVD d'inversion de matrice : en surdimensionnant le système, il est généralement possible d'obtenir une solution cohérente



sur les sources de courant. Cependant, comme il est montré dans le Chapitre 6, cette technique n'est pas toujours à l'abri des problèmes de conditionnement de matrice.

#### **1.4.6 Contraintes du programme**

De nombreux paramètres doivent être ajustés afin de minimiser les erreurs et de modéliser le plus fidèlement possible la distribution des courants magnétiques sur l'antenne. Le problème devient alors d'ordre numérique. Comment s'assurer que le nombre de mesures est suffisant pour calculer les sources inconnues ? L'emplacement des sources inconnues correspond-il à la géométrie physique de l'antenne sous test ? Quelle sera l'erreur causée par un mauvais emplacement des sources ? La discrétisation des sources sur l'antenne sous test ne doit être ni trop fine pour ne pas générer des erreurs d'arrondis (ni un temps de calcul excessif), ni trop grossière pour ne pas provoquer des erreurs de discrétisation. Dans cette mesure, est-il possible d'obtenir un compromis qui garantisse une erreur minimale ? Est-il possible de quantifier les erreurs tant expérimentales que de modélisation ? L'analyse de l'erreur et le développement d'une technique de régularisation explicités aux Chapitres 5 et 6 répondent à ces questions.

#### **1.5 Avantages et inconvénients de la méthode CME**

La méthode CME présente certains avantages par rapport à l'autre solution homologue, par transformées de Fourier :

- Elle permet d'obtenir une image des courants circulants dans l'antenne sous test.
- Elle élimine l'effet de Gibbs causé par la troncature de l'espace d'échantillonnage.
- Elle permet de déterminer le diagramme de rayonnement arrière de l'antenne.  
Dans le cas où un plan de masse se trouve derrière l'antenne, les phénomènes de diffraction peuvent être considérés.
- Elle permet le diagnostic d'antennes dont le rayonnement arrière est non-négligeable.

Toutefois, l'inconvénient principal de la méthode CME est son long temps de calcul. Un effort d'optimisation des algorithmes a été fait et sera présenté dans le Chapitre 2. Une autre difficulté est la sensibilité de la méthode aux perturbations. Ce problème sera traité dans le Chapitre 6.

## CHAPITRE 2

### OPTIMISATION DU CALCUL DES ÉLÉMENTS DE LA MATRICE D'IMPÉDANCE MUTUELLE

#### 2.1 Nécessité d'analyser les routines de calcul

De manière générale, la CME nécessite le calcul de l'intégrale de la contribution du champ magnétique d'un dipôle électrique sur le dipôle magnétique. Celle-ci doit être calculée élément par élément pour chaque position de la sonde et pour chaque source de courant. La matrice d'impédance (matrice  $[Z]$  dans l'équation 1.19) contient  $M \times N$  éléments pour  $M$  prises de mesures de tension de sonde et  $N$  courants magnétiques à déterminer.

Le remplissage de cette matrice constitue une part importante du temps de calcul total du programme *Slot*. Il aurait été possible de simplifier le remplissage à l'aide de considérations sur la symétrie de la topologie du système à résoudre, par exemple, avec les matrices de type Toeplitz. Cependant, cela aurait privé l'utilisateur de la liberté de pouvoir placer la sonde là où il le désire, puisque certaines contraintes auraient été imposées pour éviter le calcul systématique de l'impédance entre les deux dipôles. Ce dernier critère étant important, nous avons tenté de minimiser le temps de calcul de chacun des éléments de la matrice plutôt que le nombre d'éléments à calculer.

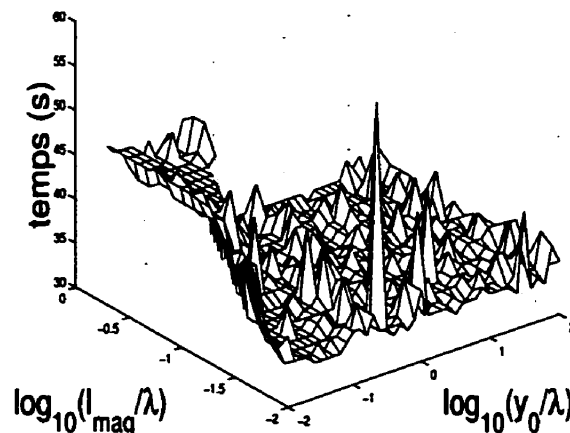
**Tableau 2.1:** Exemple de performances de calcul d'impédance donné par *gprof* lors du calcul des courants sur une antenne *patch* donnée dans [12].

time(%)	seconde	appels	temps par appels (ms)	routine
55,3	0,67	-	-	autre
14,9	0,18	21000	0,01	<b>xab</b>
14,9	0,18	21000	0,01	<b>rab</b>
6,6	0,08	2000	0,04	<b>dqage</b>
6,6	0,08	2000	0,04	<b>dqk21</b>
1,7	0,02	2000	0,01	<b>dqag</b>

Ci-après, à la section (section 2.2), différentes méthodes de calcul analytique de l'impédance sont présentées.

Une analyse des performances des différentes méthodes (voir section 2.3) permet de constater qu'il n'existe pas de solution unique dans la mesure où chaque méthode est valide sur un certain domaine de valeurs des paramètres (longueurs de monopôle magnétique et distance de balayage de la sonde). Cela mène à la recherche d'un algorithme hybride de calcul de l'impédance mutuelle capable de sélectionner la méthode optimale en terme de temps de calcul et en précision numérique. Cet algorithme est constitué d'une combinaison des différentes méthodes énoncées dans la section 2.2 et d'une condition de branchement qui orientera le calcul vers la bonne méthode.

Le Tableau 2.1 montre le temps de calcul pour chacune des sous routines lors de l'exécution du programme *Slot* sur plate-forme *HP-Unix*. Ces valeurs sont données par *gprof*, un logiciel qui permet d'enregistrer les informations sur le temps d'exécution des routines. Les routines indiquées en caractères gras sont utilisées pour le



**Figure 2.1:** Exemple de performances en temps de calcul de l'impédance en fonction de la distance  $y_0$  entre le plan de mesure contenant la sonde et le plan de l'antenne sous test et  $l_{mag}$ , longueur des dipôles magnétiques. Le temps correspond à 100 calculs d'impédance.

calcul de l'impédance. Le terme *autre* fait référence à toutes les activités nécessaires et non-optimisables (lecture/écriture de fichier, allocation de mémoire, etc.). On estime que les routines de calcul de l'impédance consomment à peu près 45% du temps total du programme. De plus, d'autres essais ont démontré que ce temps est proportionnel à la taille des dipôles et inversement proportionnel à la distance entre le dipôle magnétique et la sonde.

Un exemple des performances en temps de calcul de l'impédance est présenté à la Figure 2.1 : les dipôles sont orientés de telle sorte à ce que le couplage soit maximum (c'est-à-dire perpendiculaires l'un par rapport à l'autre) et la longueur de la sonde est de  $\lambda/100$ . Les irrégularités sont causées par la nature multi-tâches du système

*Unix*. Plus on se rapproche de l'antenne sous test ( $y_0$  petit), plus le temps de calcul augmente. Ce phénomène sera étudié plus loin.

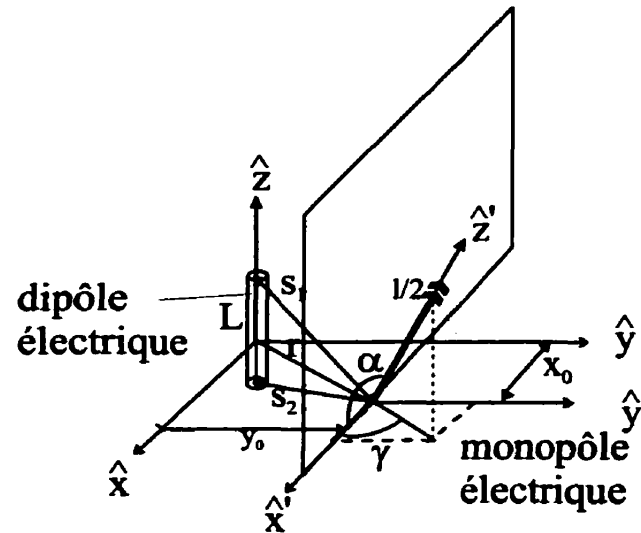
## **2.2 Développement des différentes méthodes de calculs de l'impédance mutuelle**

### **2.2.1 Méthodes disponibles**

Plusieurs méthodes ont été développées par différents chercheurs pour calculer l'impédance mutuelle entre un dipôle électrique et un dipôle magnétique. Une première méthode (section 2.2.2) évalue l'intégrale grâce une méthode de quadrature Gauss-Kronrod (dont une routine est disponible dans la librairie publique *SLATEC*). Une autre méthode (section 2.2.3) consiste en une expression développée par Balanis. Enfin, (section 2.2.4) une approximation de l'impédance en posant un champ  $\vec{H}$  constant le long du dipôle magnétique permettra dans certaines conditions d'obtenir une estimation relativement précise de l'impédance (et rapide puisque nécessitant moins de calculs).

Un calcul présenté à l'annexe A permet de transformer cette intégrale en une somme d'intégrales plus simples. Le calcul que nous avons effectué ne s'étant avéré pas performant (très lent par rapport aux autres méthodes), celui-ci est montré à titre indicatif pour présenter l'équivalence de ce calcul avec celui développé par Balanis.

### 2.2.2 Développement du calcul de l'impédance mutuelle pour l'intégration par quadrature de Gauss-Kronrod



**Figure 2.2:** Géométrie du problème : dipôle électrique et monopôle magnétique dans le formalisme de Laurin [12]

Une approche efficace développée par Laurin [12] pour calculer l'impédance entre deux dipôles consiste à évaluer l'intégrale directe de l'expression 2.1 sans développement analytique de cette expression (à l'exception de la décomposition en partie réelle et partie imaginaire, pour des raisons informatiques) grâce à une routine robuste et rapide d'intégration par quadrature de Gauss (*DQAG* de *SLATEC*).

La définition du problème et des variables est donnée à la Figure 2.2. Comme cela est montré dans la section 2.2.3, le système est réciproque et le calcul *dual* de cette expression est tout aussi valable. L'expression de l'impédance générale est donnée

par :

$$Z_{ab} = \int \bar{H}_a \cdot \bar{M}_b dV \quad (2.1)$$

où  $\bar{H}_a$  est le champ produit par un dipôle électrique ayant un courant de base unitaire ( $I(0) = 1$ ) et  $\bar{M}_b$  la distribution du courant magnétique sur le monopôle ayant un courant de base unitaire ( $K(0) = 1$ ). Dans le cas d'un dipôle électrique orienté selon l'axe  $\hat{z}$  et orienté à l'origine,  $\bar{H}_a$ ,  $\bar{M}_b$  s'expriment par :

$$\bar{H}_a = \hat{\varphi} \frac{j}{\sin(\beta L/2) \pi r \sin \theta} (e^{-j\beta(s_1)} + e^{-j\beta(s_2)} - 2 \cos(\beta L/2) e^{-j\beta r}) \quad (2.2)$$

$$\bar{M}_b = \hat{z}' \frac{\sin(\beta(l/2 - z'))}{\sin(\beta l/2)} \quad (2.3)$$

où  $L$  est la longueur du dipôle électrique, et  $l/2$  la longueur du monopôle magnétique.  $\bar{r}$  est un vecteur partant du centre du dipôle électrique à un point sur le monopôle magnétique,  $\bar{r}'_1, \bar{r}'_2$  sont les positions des extrémités du dipôle magnétique par rapport au centre du dipôle électrique (seul le vecteur  $\bar{r}$  est indiqué sur la figure



pour des raisons de clarté). Les longueurs  $s_1$  et  $s_2$  (figure 2.2) sont définies plus loin.

$x_0, y_0, z_0$  représentent les coordonnées de la base du monopôle magnétique.

Soit  $\vec{z}'$  le vecteur orienté selon l'axe du dipôle magnétique :

$$\vec{z}' = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (2.4)$$

On a aussi  $\vec{r}$  un vecteur partant du centre du dipôle électrique et se terminant à un point sur l'axe  $\vec{z}'$  :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + z' \hat{z}' \quad (2.5)$$

où  $r_0$  est donné par :

$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k} \quad (2.6)$$

$r$ , la longueur scalaire de ce vecteur est donnée par :

$$r = |\vec{r}| = \{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2 + (z_0 + z' \cos \alpha)^2\}^{1/2} \quad (2.7)$$

où  $\alpha$  est l'angle entre les vecteurs unitaires  $\hat{z}$  et  $\hat{z}'$  et  $\gamma$  l'angle entre  $\hat{x}$  et la projection de  $\hat{z}'$  dans le plan  $xy$ .

On détermine par trigonométrie, le cosinus de l'angle  $\theta$ , angle entre l'axe du dipôle

électrique  $\hat{z}$  et le vecteur  $\hat{r}$  :

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \hat{r} \cdot \hat{z} \\
 &= \frac{1}{r}(\bar{r}_0 \cdot \hat{z} + z' \hat{z}' \cdot \hat{z}) \\
 &= \frac{1}{r}(z_0 + z' \cos \alpha)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

On définit  $s_1, s_2$ , les distances entre chacune des extrémités du dipôle électrique et un point sur l'axe  $\hat{z}'$ . À l'aide de la loi du cosinus on trouve :

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \sqrt{r^2 + (L/2)^2 - rL \cos \theta} \\
 s_2 &= \sqrt{r^2 + (L/2)^2 + rL \cos \theta}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Avec les définitions précédentes, l'équation 2.1 peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 Z_{ab} &= \frac{j \sin \alpha}{4 \pi \sin(\beta l/2) \sin(\beta L/2)} \\
 &\int_0^{l/2} \left( \frac{-y_0 \cos \gamma + x_0 \sin \gamma}{\sqrt{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2}} \right) \\
 &\quad \frac{\sin(\beta (l/2 - z'))}{\sqrt{r^2 - (z_0 + z' \cos \alpha)^2}} \\
 &\quad (e^{-j\beta s_1} + e^{-j\beta s_2} - 2 \cos(\beta L/2) e^{-j\beta r}) dz'
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

On peut décomposer en parties réelle et imaginaire l'équation 2.10. Ce qui permet-

tra d'utiliser ces équations dans la routine d'intégration numérique par quadrature de Gauss de la librairie *SLATEC*.

$$Z_{ab} = R_{ab} + j X_{ab} \quad (2.11)$$

La résistance  $R$  est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} R_{ab} = & \frac{\sin \alpha (-y_0 \cos \gamma + x_0 \sin \gamma)}{4 \pi \sin(\beta l/2) \sin(\beta L/2)} \\ & \left( \int_0^{l/2} \frac{\sin(\beta s_1) \sin(\beta (l/2 - z')) dz'}{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2} + \right. \\ & \int_0^{l/2} \frac{\sin(\beta s_2) \sin(\beta (l/2 - z')) dz'}{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2} - \\ & \left. 2 \cos(\beta L/2) \int_0^{l/2} \frac{\sin(\beta r) \sin(\beta (l/2 - z')) dz'}{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2} \right) \end{aligned}$$

La réactance  $X$  est donnée par l'expression :

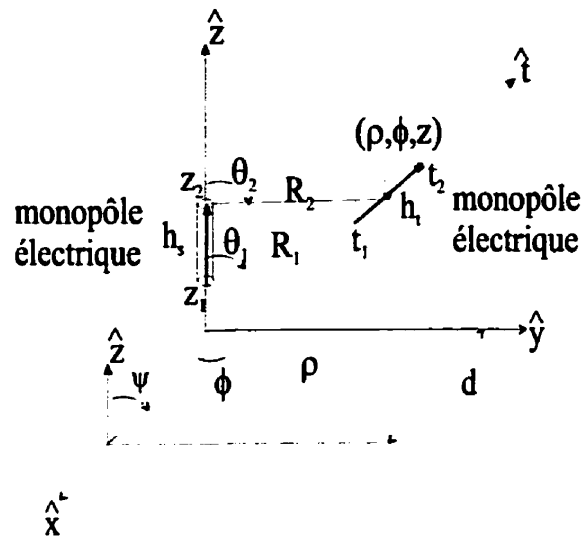
$$\begin{aligned} X_{ab} = & \frac{\sin \alpha (-y_0 \cos \gamma + x_0 \sin \gamma)}{4 \pi \sin(\beta l/2) \sin(\beta L/2)} \\ & \left( \int_0^{l/2} \frac{\cos(\beta s_1) \sin(\beta (l/2 - z')) dz'}{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2} + \right. \\ & \int_0^{l/2} \frac{\cos(\beta s_2) \sin(\beta (l/2 - z')) dz'}{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2} - \\ & \left. 2 \cos(\beta L/2) \int_0^{l/2} \frac{\cos(\beta r) \sin(\beta (l/2 - z')) dz'}{(x_0 + z' \sin \alpha \cos \gamma)^2 + (y_0 + z' \sin \alpha \sin \gamma)^2} \right) \end{aligned}$$

La routine *DQAG* (de *SLATEC*) appelle successivement ces 2 routines de calculs d'impédance pour calculer cette intégrale. La routine *DQAG* gère la précision du

résultat puisqu'elle est munie d'un mécanisme d'estimation de l'erreur qui lui permet d'adapter le pas d'intégration de manière dynamique (méthode d'intégration par quadrature de Gauss adaptative). Cela en fait une méthode à la fois très performante et très robuste.

### 2.2.3 Expression de l'impédance mutuelle donnée par Balanis

Une expression performante de l'impédance mutuelle entre un dipôle électrique et un dipôle magnétique a été développée par Liu et Balanis [14]. Le formalisme est similaire à celui de Richmond [20].



**Figure 2.3:** Système de coordonnées utilisé dans le formalisme de Liu et Balanis [14].

Suivant ce formalisme, l'impédance mutuelle entre un monopôle électrique et un

monopôle magnétique est donnée par :

$$Z = \frac{1}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \int_{t_1}^{t_2} \bar{M}(t) \cdot \bar{H}(\bar{I}, t) dt \quad (2.12)$$

et de manière réciproque :

$$Z = -\frac{1}{j\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \int_{z_1}^{z_2} \bar{I}(z) \cdot \bar{E}(\bar{M}, z) dz \quad (2.13)$$

où  $t_1, t_2, z_1, z_2$  représentent les coordonnées dans le référentiel de Richmond (à l'annexe B, on explique comment exprimer ces variables en fonction des définitions données plus haut).

Les courants électrique  $\bar{I}(t)$  et magnétique  $\bar{M}(t)$  sont donnés par l'expression :

$$\begin{aligned} \bar{I}(z) &= \frac{I_1 \sinh(z_2 - z) + I_2 \sinh(z - z_1)}{\sinh(h_s)} \hat{z} \\ \bar{M}(t) &= \frac{M_1 \sinh(t_2 - t) + M_2 \sinh(t - t_1)}{\sinh(h_t)} \hat{t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où  $h_s$  et  $h_t$  représentent les longueurs des monopôles (voir Figure 2.3) normalisées par rapport au nombre d'ondes complexe. Toutes les longueurs exprimées dans cette section sont normalisées suivant la convention de Richmond [20] (les valeurs sont multipliées par  $j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$  et sont donc pas sans dimension).  $I_1, I_2$  dénotent les courants aux extrémités du monopôle électrique.  $M_1, M_2$  expriment les courants aux extrémités des segments du monopôle magnétique.

La réciprocité est valable si les charges magnétiques ne contribuent pas au champ  $\bar{E}(\bar{M}, z)$  et si les charges électriques ne contribuent pas au champ  $\bar{H}(\bar{I}, t)$ . Le champ  $\bar{H}(\bar{I}, t)$  est donné rigoureusement par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{I}, t) = \frac{A}{\rho} \{ & (I_1 \sinh(h_s) \cos \theta_1 + I_1 \cosh(h_s) \cos \theta_1 - I_2) e^{R_1} \\ & - (I_2 \sinh(h_s) \cos \theta_2 + I_2 \cosh(h_s) \cos \theta_1 - I_1) e^{R_2} \} \hat{a}_\phi \end{aligned} \quad (2.15)$$

Avec A définie par :

$$A = \frac{j\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{4\pi \sinh(h_s)} \quad (2.16)$$

On peut développer l'équation 2.12 de la manière suivante :

$$Z = -\frac{1}{j\omega \sqrt{\mu\epsilon}} \int_{t_1}^{t_2} \bar{M}(t) \bar{H}_\phi \frac{d \sin \psi}{\rho} dt \quad (2.17)$$

Avec les expressions du courant  $\bar{M}$  et du champ  $\bar{H}$  qui sont définies plus haut, on peut réécrire l'équation 2.12 :

$$\begin{aligned} Z = -\frac{A \sin \psi}{j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \sinh(h_t)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{\rho^2} [ & M_1 \sinh(t_2 - t) + M_2 \sinh(t - t_1) ] \\ & [ \{ I_1 \sinh(h_s) \cos \theta_1 + I_1 \cosh(h_s) - I_2 \} e^{R_1} \\ & - \{ I_2 \sinh(h_s) \cos \theta_2 + I_2 \cosh(h_s) - I_1 \} e^{R_2} ] dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

Développons l'expression de l'impédance mutuelle entre un monopôle électrique et un monopôle magnétique. La formule 2.19 permet de calculer l'impédance mutuelle entre un dipôle électrique et un dipôle magnétique. Après quelques manipulations et redéfinitions de variables, nous obtenons une expression simplifiée de l'impédance entre le monopôle électrique  $i$  et le monopôle magnétique  $j$  ( $i = 1, 2$  ;  $j = 1, 2$ ) :

$$Z_{3-i,3-j} = -(-1)^{i+j} \cdot B \left[ e^{t_j} (Q_{22} e^{z_i} + Q_{12} e^{-z_i}) - e^{-t_j} (Q_{21} e^{z_i} + Q_{11} e^{-z_i}) \right] \quad (2.19)$$

Cette expression sera utilisée plus loin pour calculer l'impédance dipôle à dipôle (voir Figure 2.4).

$Q_{kl}$  est défini par (voir 2.3) :

$$\begin{aligned} Q_{kl} = & E(R_2 + mz_2 + nt_2 - j\beta, R_2 + mz_2 + nt_1 - j\beta, -j\beta) \\ & - E(R_2 + mz_2 + nt_2 + j\beta, R_2 + mz_2 + nt_1 + j\beta, -j\beta) \\ & - E(R_1 + mz_1 + nt_2 - j\beta, R_1 + mz_1 + nt_1 - j\beta, -j\beta) \\ & + E(R_1 + mz_1 + nt_2 + j\beta, R_1 + mz_1 + nt_1 + j\beta, -j\beta) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$E(u_1, u_2, u_3)$  représente la fonction intégrale de l'exponentielle modifiée entre les bornes  $u_2$  et  $u_1$  et est donnée par l'équation suivante :

$$E(u_1, u_2, u_3) = e^{ju_3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-z}}{z} dz \quad (2.21)$$

On définit les variables suivantes pour simplifier les équations :

$$\begin{aligned}
 B &= -\frac{j}{16 \pi \sinh(h_s) \sinh(h_t)} \\
 \beta &= mb + nc \\
 n &= (-1)^l \\
 \psi &= \cos^{-1}(\vec{t} \cdot \vec{z}) \\
 b &= c \cos \psi \\
 c &= \frac{d}{\sin \psi}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

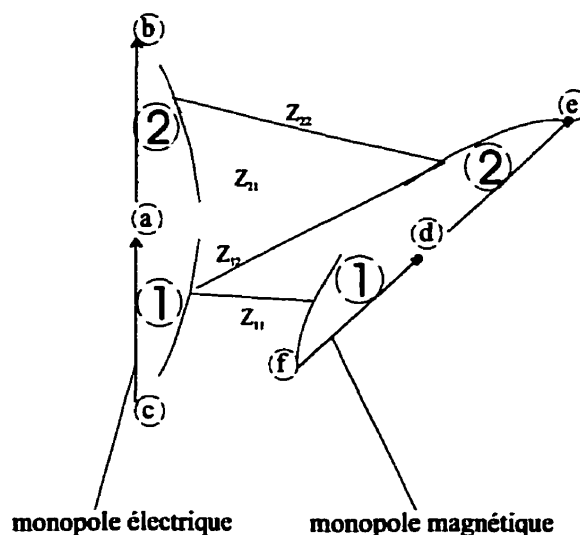
Bien que la méthode employée pour évaluer cette intégrale soit critique afin d'obtenir une routine de calcul de l'impédance très rapide, l'analyse et le développement de différentes méthodes permettant d'évaluer cette fonction se trouvent à l'annexe C, afin de ne pas alourdir ce chapitre.

Comme illustré la Figure 2.4, l'impédance mutuelle entre deux dipôles est la somme des impédances des quatre monopôles :

$$\begin{aligned}
 Z_{ab} &= Z_{22}(\bar{r}_a, \bar{r}_b, \bar{r}_d, \bar{r}_e) + \\
 &\quad Z_{12}(\bar{r}_c, \bar{r}_a, \bar{r}_d, \bar{r}_e) + \\
 &\quad Z_{21}(\bar{r}_a, \bar{r}_b, \bar{r}_f, \bar{r}_d) + \\
 &\quad Z_{11}(\bar{r}_c, \bar{r}_a, \bar{r}_f, \bar{r}_f)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$



Les vecteurs  $\bar{r}_a, \bar{r}_b, \bar{r}_c, \bar{r}_d, \bar{r}_e, \bar{r}_f$  représentent les positions des extrémités de chacun des monopôles tel que montré à la Figure 2.4.



**Figure 2.4:** Impédance  $Z_{ab}$  entre les dipôles exprimée sous forme de la somme des impédances des monopôles. Les extrémités segments sont formées des coordonnées des points  $a, b, c, d, e, f$ .

Un changement de référentiel est nécessaire pour calculer 2.23 à partir de l'équation 2.19, comme montré l'Annexe B.

#### 2.2.4 Expression de l'impédance mutuelle approximée à champ $H$ constant sur le dipôle magnétique

Il a été montré que le problème de la lenteur du calcul de l'impédance est lié à l'intégrale du champ  $\bar{H}$  le long du dipôle magnétique. En champ proche, le problème est insoluble : le champ  $\bar{H}$  varie beaucoup et il est impossible d'obtenir une expression approchée. Cependant, en champ lointain, le couplage diminue et le champ  $\bar{H}$

est relativement constant le long du dipôle. Il faut donc se demander si une expression approchée de l'impédance, pour un seuil de précision donné, permettrait d'obtenir une réponse en effectuant moins de calculs. Le problème revient à établir un compromis entre la précision et le temps de calcul.

Il est communément admis (par exemple [24]) que l'approximation en champ lointain est valable aussi longtemps que les trois conditions suivantes sont respectées :

$$\begin{aligned} r &> \frac{2D^2}{\lambda} \\ r &> D \\ r &\gg \lambda \end{aligned} \tag{2.24}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde,  $r$  la distance de la sonde au dipôle et  $D$  la longueur de dipôle éclairant. Enfin, notons que la dernière inégalité des relations 2.24 s'écrit, en pratique, sous la forme  $r > 10\lambda$ .

L'approximation en champ lointain consiste à négliger le troisième terme et les suivants du développement en série des distances  $s_1, s_2$  (données par les équations 2.9). Les termes  $s_1, s_2$  sont fonction de la variable d'intégration  $z'$ . Une alternative plus précise consiste à conserver les distances exactes  $s_1, s_2$  afin de ne pas perdre l'information sur la différence de phase entre les extrémités du dipôle, mais en considérant le champ  $H$  constant le long du dipôle magnétique.

En réutilisant le formalisme de la section 2.2.2, l'équation 2.10 peut donc s'écrire :

$$Z_{ab} = \frac{j \sin \alpha}{4\pi \sin(\beta l/2) \sin(\beta L/2)} \frac{(-y_0 \cos \gamma + x_0 \sin \gamma)}{r^2 \sin^2 \theta} (e^{-j\beta s_1} + e^{-j\beta s_2} - 2 \cos(\beta L/2) e^{-j\beta r}) \int_0^{l/2} \sin(\beta(l/2 - z')) dz' \quad (2.25)$$

où  $s_1, s_2$  sont constantes et évaluées en  $z' = 0$ . Finalement, on a :

$$Z_{ab} = \frac{j \sin \alpha}{4\pi \sin(\beta l/2) \sin(\beta L/2)} \frac{(-y_0 \cos \gamma + x_0 \sin \gamma)}{x_0^2 + y_0^2} (e^{-j\beta s_1} + e^{-j\beta s_2} - 2 \cos(\beta L/2) e^{-j\beta r}) \left[ \frac{1 - \cos(\beta l/2)}{\beta} \right] \quad (2.26)$$

Cette approximation n'est évidemment plus valable en champ proche (la distance du champ proche est fixée par les inégalités 2.24).

En champ lointain, comme cela est montré plus loin, cette approximation est relativement précise pour calculer l'impédance entre un **monopôle magnétique** et un **dipôle électrique**.

#### 2.2.4.1 Étude de l'erreur sur le calcul de l'impédance mutuelle approximée à champ H constant sur le dipôle électrique

Une approximation a été élaborée dans la section précédente. Cette section étudiera le domaine de validité de cette approximation. Cette section nous permettra d'établir la condition de branchement de l'algorithme hybride de calcul de l'impé-

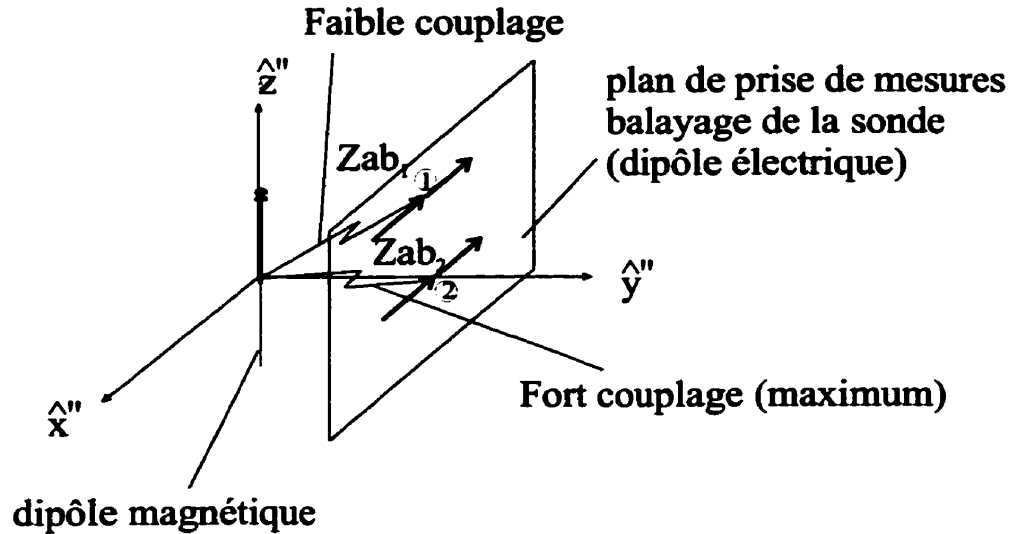
dance. Ainsi on pourra évaluer l'erreur générée par le calcul approximé de l'impédance et décider si cette erreur est acceptable ou non.

L'équation 2.26 est relativement complexe et une étude analytique des erreurs serait fastidieuse, difficile à mettre en oeuvre dans une routine numérique. Cependant, il est évident que les deux paramètres principaux susceptibles d'influencer l'erreur engendrée par l'approximation de champ constant sont  $l_{mag}$  et  $y_0$ . Puisque le principe de l'approximation est semblable à celui de l'approximation en champ lointain, une expression de l'erreur en fonction des paramètres  $D/\lambda$   $r/\lambda$ , impliqués dans les inégalités 2.24, a été développée. On a pu conclure par des calculs non montrés ici, que :

- la longueur du dipôle formant la sonde a un effet négligeable sur l'erreur relative parce que cette valeur est très petite ( $l_{sonde}/\lambda \approx 1/10$ ),
- la taille des dipôles magnétiques  $l_{mag}$  et la distance  $y_0$  du plan de mesure à l'antenne sous test sont les paramètres qui influencent la précision de l'approximation en champ lointain.

D'autre part une autre observation à propos du couplage permet de simplifier davantage notre analyse de l'erreur du calcul de l'impédance approximé : en promenant la sonde, formée du dipôle électrique, (voir Figure 2.5) dans un plan, le couplage est maximum lorsque la distance avec le monopôle magnétique est minimale. À cet endroit, l'erreur absolue due à l'approximation est maximale. Cette distance minimale

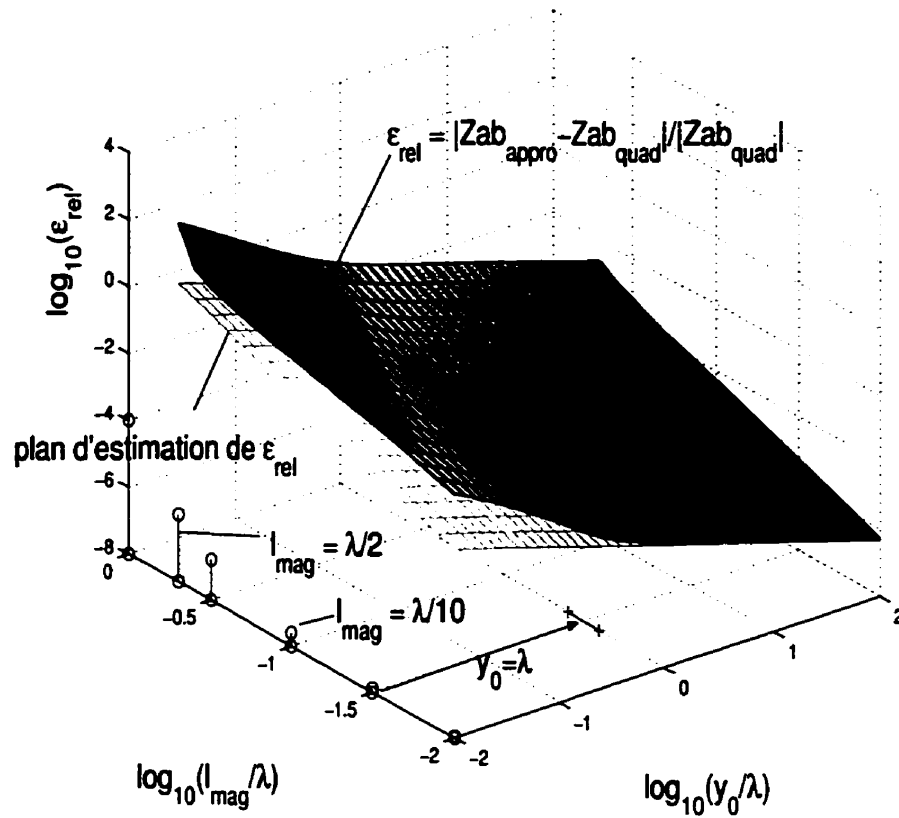
(qui correspond à des angles  $\alpha = 0^\circ$  et  $\gamma = 90^\circ$ ) fixe une borne supérieure sur l'erreur absolue engendrée par cette approximation.



**Figure 2.5:** Couplage entre un dipôle magnétique et un dipôle électrique dans le référentiel de prises de mesures. La position de couplage maximum constitue la borne supérieure de l'erreur absolue.

La distance  $r$  projetée sur l'axe des  $y$  correspond à la variable  $y_0$ . La Figure 2.6 montre la courbe de l'erreur relative en fonction de  $y_0$  et la taille du dipôle magnétique  $l$ .

Comme illustré à la Figure 2.6, on observe que la surface de l'erreur relative est régulière et donc elle peut être approximée par un plan. L'équation de ce plan permet d'estimer l'erreur relative sur cette approximation. Cette information servira à établir la condition de branchement dans l'algorithme hybride. Les autres paramètres ont été fixés (angles  $\alpha = 0, \gamma = 90$ ) afin d'obtenir un couplage maximum et la longueur



**Figure 2.6:** Erreur relative sur l'approximation du champ H constant pour différentes longueurs de monopôles magnétiques ( $l_{mag}$  appelé  $l$  dans ce formalisme) et différentes distances  $y_0$  (monopôles à monopôles) projetées sur l'axe des  $y$ . La longueur de la sonde est  $\lambda/100$ .

de la sonde a été fixée à  $\lambda/100$ . Cette longueur n'influe pas de façon significative sur le résultat de la courbe d'erreur relative donnée à la Figure 2.6.

L'équation du plan qui approxime la courbe d'erreur est donnée par :

$$0,9778 \log_{10}(y_0/\lambda) + -1,9411 \log_{10}(l_{mag}/\lambda) + 0,4620 = \log_{10}(\epsilon_{restime}) \quad (2.27)$$

où  $\epsilon_{restime}$  représente l'erreur relative estimée sur le calcul de l'impédance entre un monopôle magnétique et un dipôle électrique.

Les paramètres de ce plan approximant l'erreur relative ont été optimisés pour s'assurer que l'erreur réelle soit inférieure à l'erreur estimée tout en gardant le plan d'estimation le près possible de la surface de l'erreur relative. Nous avons développé un moyen d'estimer l'erreur commise lors du calcul approximé dans le calcul de l'impédance entre **dipôle électrique** et le **monopôle magnétique**. L'erreur commise dans le calcul de l'impédance **dipôle à dipôle** est simplement la somme des erreurs relatives **dipôle à monopôle**.

### 2.3 Recherche et analyse d'un algorithme hybride : compromis entre le temps de calcul et la précision numérique

Le compromis entre la vitesse d'exécution et la précision de calcul est plus complexe que ce qui a été décrit ci-dessus, car il faut aussi tenir compte d'un autre facteur. En effet, il suffit de diminuer la taille des dipôles pour que l'approximation de champ lointain soit valable. Il faut rappeler que les dipôles sont obligatoirement contigus et se chevauchent (pour ne pas forcer des courants nuls aux extrémités des segments). Donc, diminuer la taille des dipôles qui représentent le maillage d'une surface de  $N$  éléments oblige à augmenter le nombre d'éléments. Le temps de remplissage de la matrice d'impédance (qui ne contient aucun élément de symétrie) croît comme  $N^2$ . Dans l'optique de l'approximation en champ lointain, il existe donc un

compromis entre la dimension des dipôles (qui permet ou non l'utilisation de l'approximation) et le nombre de dipôles (qui influence le temps de remplissage de la matrice d'impédance).

### **2.3.1 Performances de calculs entre les différentes méthodes de calcul de l'impédance**

Il a été vu, dans l'exemple donné par le Tableau 2.1 que la routine de calcul d'impédance consomme à peu près 45% du temps total. Plusieurs approches ont été envisagées afin de diminuer ce temps de calcul et surtout de le rendre indépendant de la distance de la sonde à l'antenne sous test.

#### **2.3.1.1 Performances de calculs à partir de l'expression de Balanis**

L'expression de l'impédance mutuelle développée par Balanis et Liu a été présentée dans la section 2.2.3. Une routine a été développée et ses performances sont examinées ici.

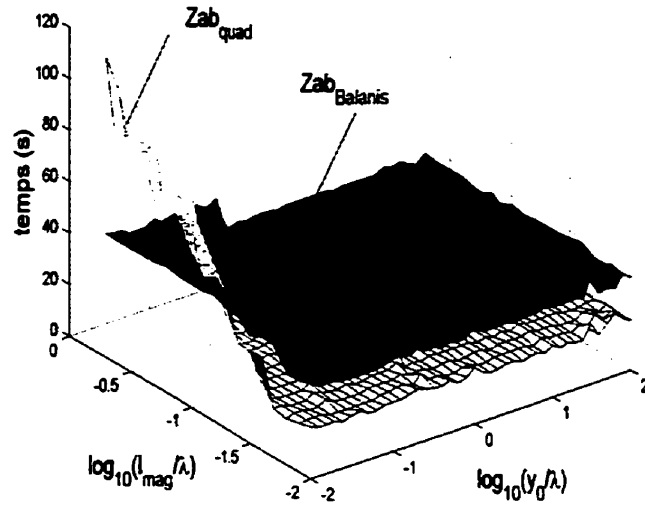
La même méthode d'analyse des performances (précision et temps de calcul) que celle développée dans la section 2.2.4.1 y est reprise. L'erreur numérique générée par le développement de Balanis est valable dans les conditions suivantes :

- angles  $\alpha = 0^\circ, \gamma = 90^\circ$ , couplage maximum
- $L = \lambda/100$ , longueur de la sonde

Les paramètres étudiés sont :



- $y_0$ , la distance le plan de l'antenne sous test et le plan de mesure en champ proche
- $l_{mag}$ , la longueur des dipôles magnétiques discrétisant l'antenne sous test.



**Figure 2.7:** Performances en temps pour 100 calculs de l'impédance en fonction de la distance ( $y_0$ ) et de longueur des dipôles magnétiques ( $l_{mag}$ ). Le couplage est maximum et la longueur de la sonde est de  $\lambda/100$ .

La Figure 2.7 montre que la méthode de calcul de Balanis est plus lente que la méthode d'intégration par quadrature de Gauss lorsque la distance de l'antenne sous test à la sonde est grande. Cependant, lorsque l'on rapproche la sonde de l'antenne et que l'on augmente la longueur des dipôles magnétiques, le temps de calcul par la méthode de quadrature augmente beaucoup. Cette augmentation s'explique par les irrégularités du champ  $\vec{H}$  générées par la sonde à la surface du dipôle magnétique. Celles-ci contraignent la méthode d'intégration numérique par quadrature de Gauss

adaptative à diminuer le pas d'intégration afin d'assurer la précision du résultat. Ce phénomène n'est pas visible dans la méthode de Balanis : le temps de calcul est indépendant des paramètres de calculs.

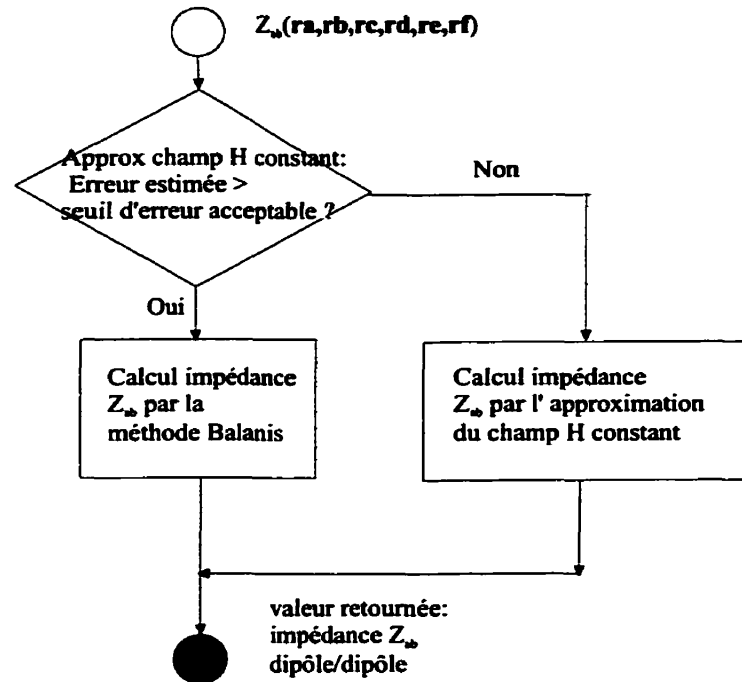
### **2.3.1.2 Performances de calculs à partir de l'impédance mutuelle approximée à champ $\vec{H}$ constant sur le dipôle magnétique**

L'erreur liée à l'approximation du champ  $\vec{H}$  constant sur le dipôle magnétique a été étudiée dans la section 2.2.4.1. Les performances en temps de calcul sont supérieures aux autres méthodes exactes, avec un temps de calcul constant. Cette routine est globalement 5 fois plus rapide que la méthode numérique par quadrature de Gauss.

### **2.3.2 Développement d'une méthode hybride de calcul de l'impédance**

L'objet de la présente section est la recherche d'une routine de calcul de l'impédance qui soit à la fois robuste numériquement et rapide. Il a été vu dans les sections précédentes que chacune des méthodes était, dans un domaine donné, relativement performante et précise. Puisque chacune d'entre elle est performante seulement dans une région spécifique, il devient nécessaire de développer une méthode hybride qui permettra de choisir la méthode en fonction du domaine où la fonction donnera un résultat rapide et précis.

Cette méthode hybride doit posséder les caractéristiques suivantes :



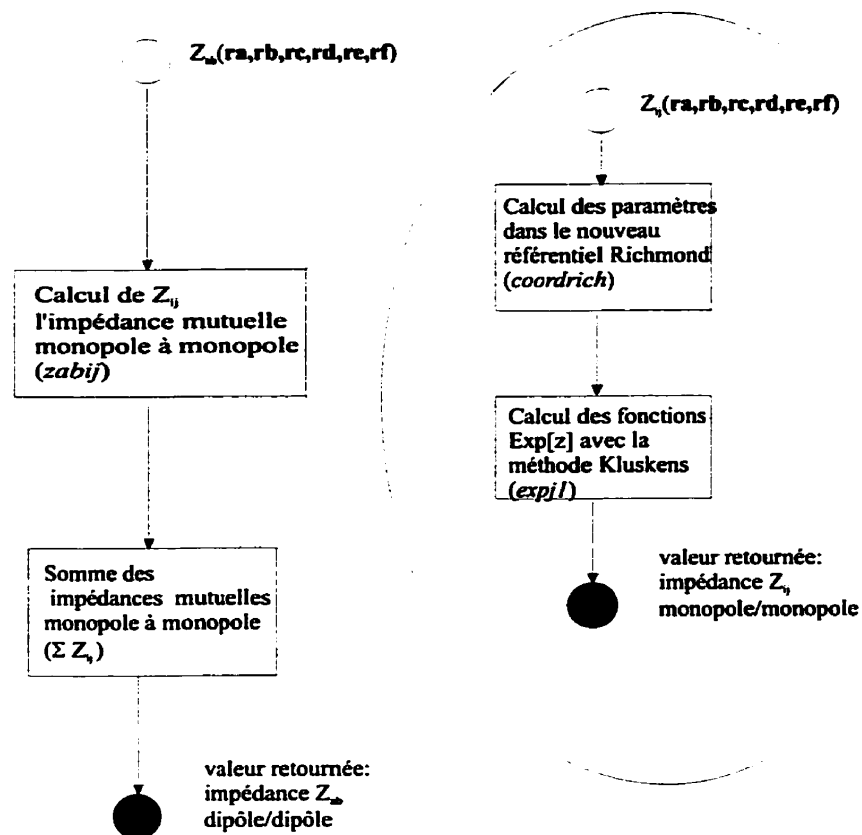
**Figure 2.8:** Diagramme de l'algorithme hybride de calcul de l'impédance retenu

- être robuste, garantir une certaine précision numérique
- être rapide (condition de branchement simple)
- avoir un temps de calcul constant (indépendant des paramètres)

La solution retenue est présentée dans cette section. La Figure 2.8 montre le diagramme fonctionnel de l'algorithme hybride retenu.

L'algorithme de branchement fonctionne de la manière suivante. La distance entre le monopôle électrique et le dipôle magnétique et la taille du dipôle magnétique sont calculés. À partir de ces valeurs, l'erreur relative sur l'impédance est estimée. Si celle-ci est supérieure à un seuil acceptable (typiquement  $10^{-3}$ ), on utilise la routine de

calcul de Balanis, sinon on utilise la routine de calcul par l'approximation du champ H constant.



**Figure 2.9:** Détail du diagramme de calcul de l'impédance par la méthode Balanis. Les noms en italique font référence aux sous-routines

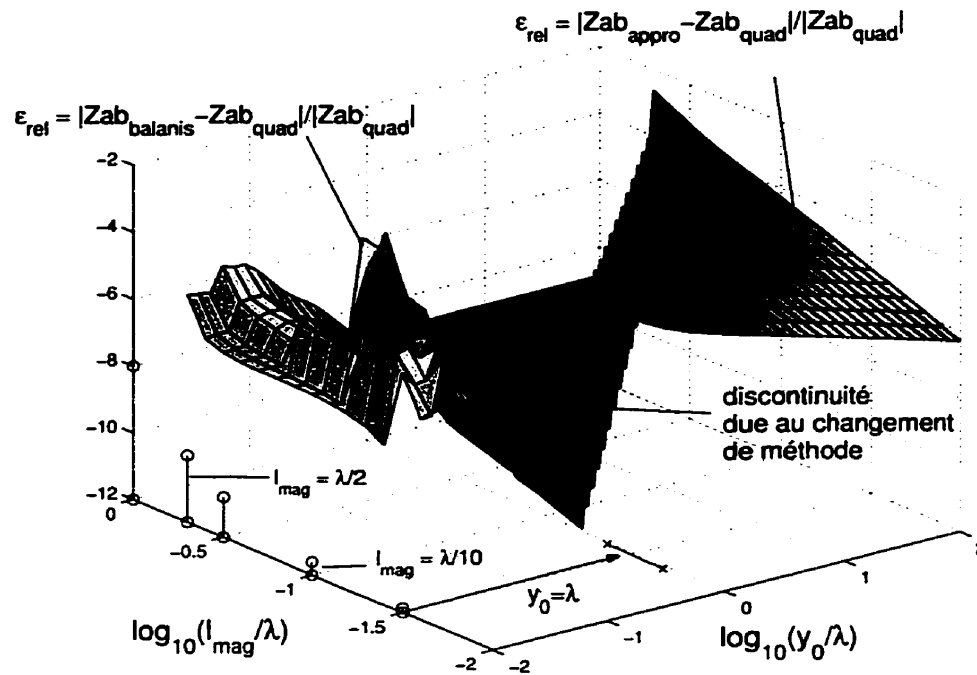
La Figure 2.9 illustre le calcul de l'impédance développé par Balanis. Les étapes de calcul sont les suivantes :

- lire les positions de chaque monopôle,
- calculer les paramètres dans le référentiel de Richmond,
- calculer l'intégrale de l'exponentielle par la méthode de Kluskens,

- effectuer la somme des impédances monopôle à monopôle pour trouver l'impédance dipôle à dipôle.

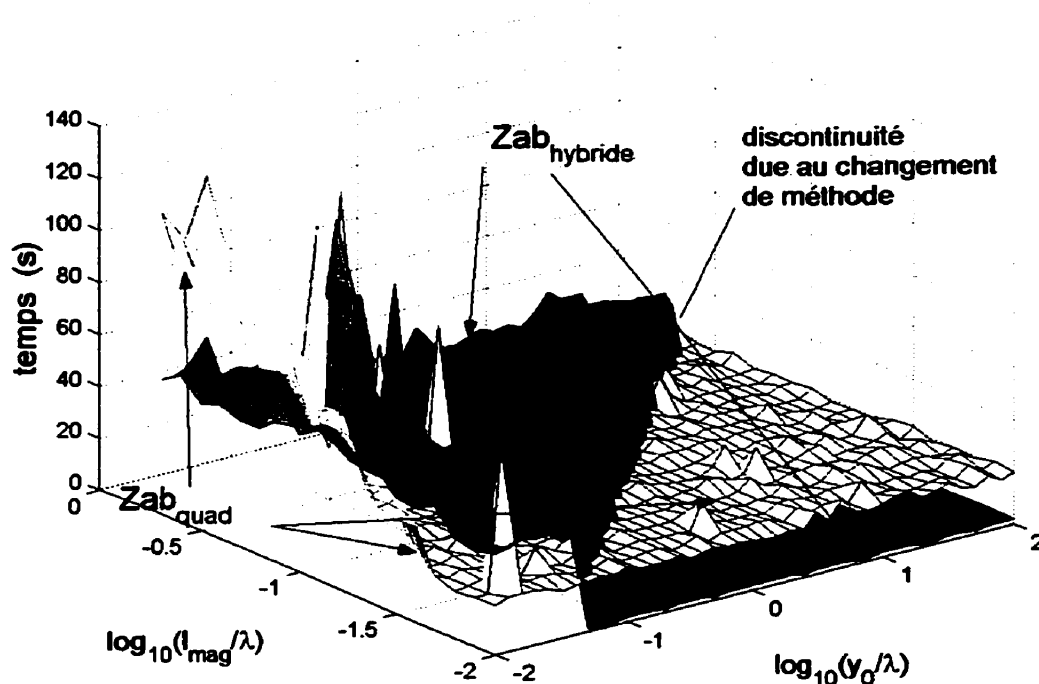
Les développements mathématiques relatifs à ces calculs sont montrés à la section 2.2.3.

### 2.3.2.1 Performances de la méthode hybride de calcul de l'impédance



**Figure 2.10:** Erreur relative entre la méthode hybride et la méthode de calcul par quadrature pour différentes longueurs de monopôles magnétiques ( $l_{mag}$  appelé  $l$  dans ce formalisme) et différentes distances  $y_0$  (monopôles à monopôles). La longueur de la sonde est  $\lambda/100$ . Le seuil d'erreur acceptable pour basculer en mode approximatif a été fixé à  $10^{-3}$ .

La surface de la Figure 2.10 représente l'erreur relative. Cette surface présente deux régions séparées par une discontinuité, produite par le changement de méthode.



**Figure 2.11:** Comparaison entre les performances données par la méthode numérique par quadrature de Gauss ( $Zab_{quad}$ ) et la méthode hybride en fonction de la distance ( $y_0$ ) et de longueur des dipôles magnétiques ( $l_{mag}$ ). Le couplage est maximum et la longueur de la sonde est de  $\lambda/100$ . Les irrégularités sont liées à la nature multi-tâches du système *Unix*.

Le seuil d'erreur acceptable pour basculer en mode approximatif a été fixé à  $10^{-3}$ . L'erreur maximum montrée à la Figure 2.10 ( $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ ) est légèrement supérieure à ce seuil. Cela est produit par l'accumulation d'erreurs lors du calcul de l'impédance dipôle à dipôle.

D'après la Figure 2.11, les performances de la méthode hybride sont meilleures dans deux domaines :

- pour de grands dipôles magnétiques et petites distances antenne sous test/sonde

- pour de grandes distances antenne sous test/sonde et de petits dipôles magnétiques

Entre ces deux domaines (comme par exemple, longueur de dipôle  $l_{mag} = \lambda/2$ , et distance  $y_0 = \lambda$ ), les performances données par cette nouvelle méthode sont presque identiques à celles fournies par la méthode de quadrature de Gauss.

D'après ce qui vient d'être mentionné et illustré à la Figure 2.11, si l'on cherche à exploiter le calcul approximé de l'impédance, alors il faut diminuer la taille des dipôles magnétiques et donc augmenter le nombre d'éléments discrétisant l'antenne sous test, comme déjà expliqué. Il existe alors un couple optimal *nombre d'éléments/tailles des dipôles* qui permet de minimiser le temps de calcul total de la matrice d'impédance.

Les conditions optimales qui permettront dans l'ensemble de minimiser le temps de calcul dépendent des paramètres expérimentaux suivants :

- taille de l'antenne sous test
- distance entre l'antenne sous test et la sonde
- géométrie de l'antenne
- perturbation de la sonde

L'optimisation du nombre d'éléments et la taille des dipôles ne sera pas abordée dans le cadre de cette recherche. De plus, il est possible que l'ajustement de ces paramètres liés aux erreurs expérimentales et la nécessité d'obtenir une image fidèle des courants dans l'antenne ne soient pas en accord avec les résultats de cette optimisation. L'analyse des erreurs sera l'objet du prochain chapitre.

## 2.4 Conclusion

Les performances comparatives de ces méthodes de calcul permettent de choisir la routine utilisée dans la routine de calcul hybride. Différentes méthodes de calcul de l'impédance entre un dipôle électrique et un dipôle magnétique ont été développées et présentées. Finalement, une méthode de calcul hybride a été élaborée grâce à la combinaison de plusieurs méthodes donnant de bonnes performances dans un certain domaine. Cette routine de calcul hybride contient une condition de branchement qui lui permet de choisir la méthode pertinente tout en s'assurant que le seuil d'erreur relative acceptable n'est pas dépassé. L'algorithme de branchement fonctionne de la manière suivante. La distance entre le monopôle électrique et le dipôle magnétique et la taille du dipôle magnétique sont calculés. À partir de ces valeurs, l'erreur relative sur l'impédance est estimée. Si celle-ci est supérieure à un seuil acceptable (typiquement  $10^{-3}$ ), on utilise la routine de calcul de Balanis, sinon on utilise la routine de calcul par l'approximation du champ H constant. L'estimation de l'erreur est calculée dans un cas de couplage maximum entre les dipôles ( $\alpha = 0$   $\gamma = 90^\circ$ ), des validations ont été effectuées pour montrer que ce cas génère une erreur plus grande qu'un cas de couplage plus faible. Cette estimation représente donc une borne supérieure de l'erreur réelle.

La méthode d'intégration par quadrature de Gauss devient très lente lorsque le plan de mesure est très proche de la structure rayonnante et que les dipôles magnétiques sont grands. Dans ces conditions, le gain de temps est un facteur de l'ordre



de 2, valeur qui augmente à 10, si le plan de mesure est loin et que les dipôles magnétiques sont petits.

La validation de cette méthode a été faite par une série de calculs basés sur des mesures qui sont décrites ci-après.

## CHAPITRE 3

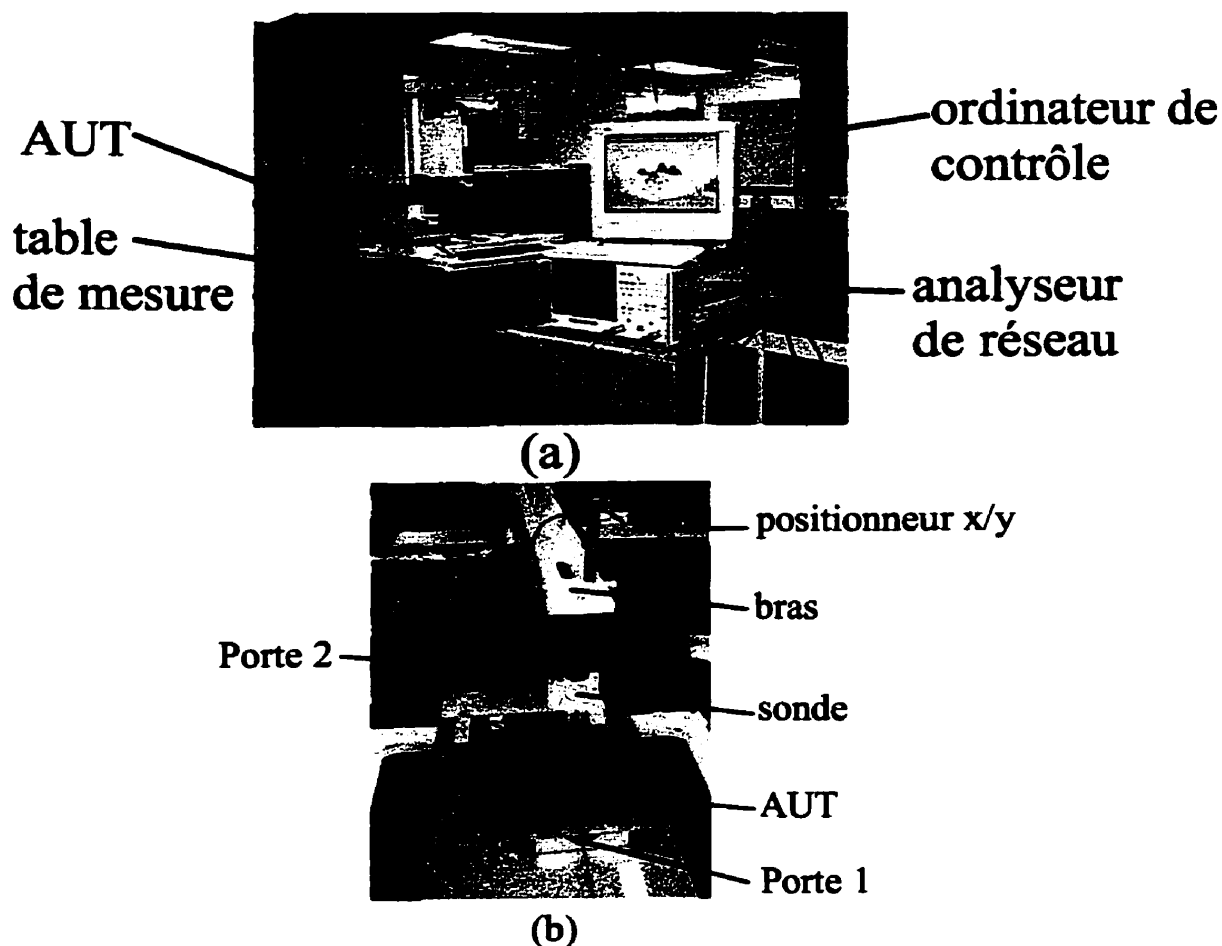
### MONTAGE EXPÉRIMENTAL

L'appareillage utilisé pour effectuer les mesures en champ proche avec cette méthode nécessite moins d'espace que la chambre anéchoïde utilisée pour effectuer des mesures en champ lointain. Les distances réelles entre l'antenne sous test et la sonde dépendent évidemment de la longueur d'onde utilisée (entre  $\lambda$  et  $\lambda/100$ ). Dans les fréquences autour des *GHz* ( $\lambda \sim cm$ ), les dimensions de l'antenne sous test sont de l'ordre de  $\lambda$  et les dimensions de la table de mesures sont de l'ordre de  $3\lambda$ , alors que la distance entre les antennes dans la chambre anéchoïde est de l'ordre de  $20\lambda$  ( $\sim 2m.$ ).

#### 3.1 La table de mesures en champ proche

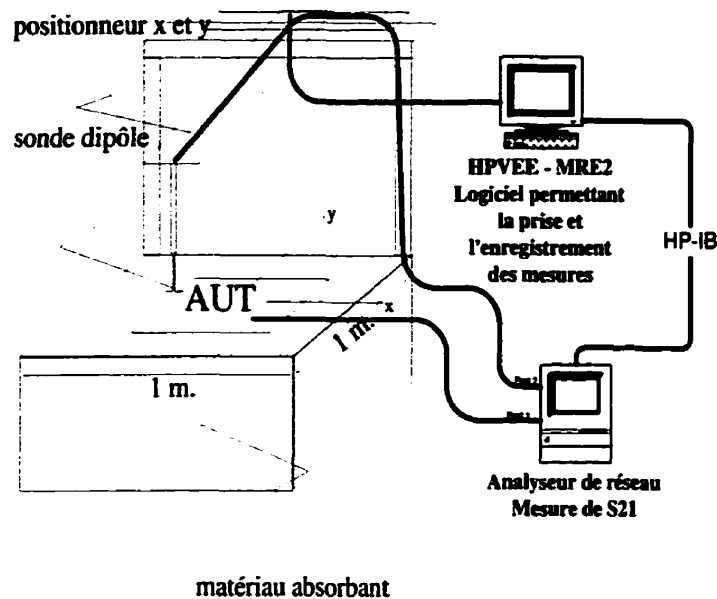
L'avantage des techniques de mesures en champ proche réside dans leur insensibilité aux perturbations extérieures. Il n'est pas nécessaire de se mettre dans des conditions aussi sévères que celles réclamées dans la chambre anéchoïde. Il faut cependant s'assurer que les matériaux choisis pour fabriquer la table de mesures n'altèrent pas ces dernières.

À cette fin, le plateau soutenant l'antenne sous test (AUT) est constitué d'un matériau absorbant (voir Figures 3.1 et 3.2). Le plateau supérieur où sont posées les positionneurs  $x/y$  est en acier, de même que les fermes soutenant ce plateau. Ceux-



**Figure 3.1:** (a) Table de mesures en champ proche fabriquée au laboratoire du Poly-Grames. (b) Agrandissement sur la sonde de mesure et l'antenne sous test.

ci sont placés suffisamment loin de l'AUT pour ne pas perturber son rayonnement. Par contre, le bras principal tenant la sonde dipôle est fait de plastique (matériau presque invisible aux micro-ondes). Ainsi, en théorie, seule la sonde vient perturber l'antenne sous test. En pratique, cependant, son effet est presque nul.

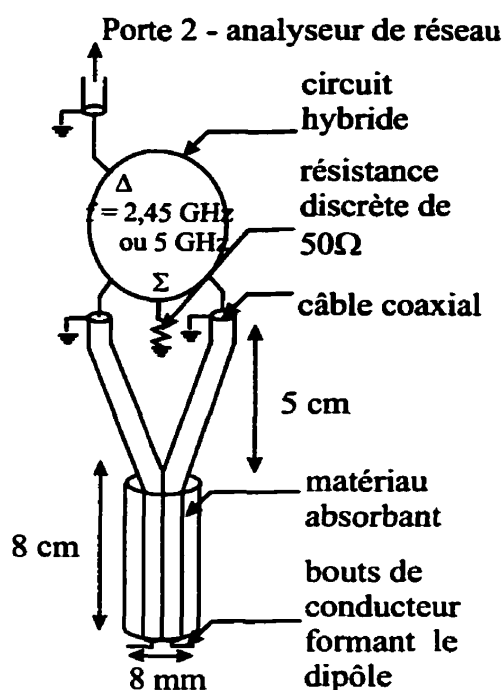


**Figure 3.2:** Schéma de la table de mesures en champ proche

### 3.2 La sonde de mesure

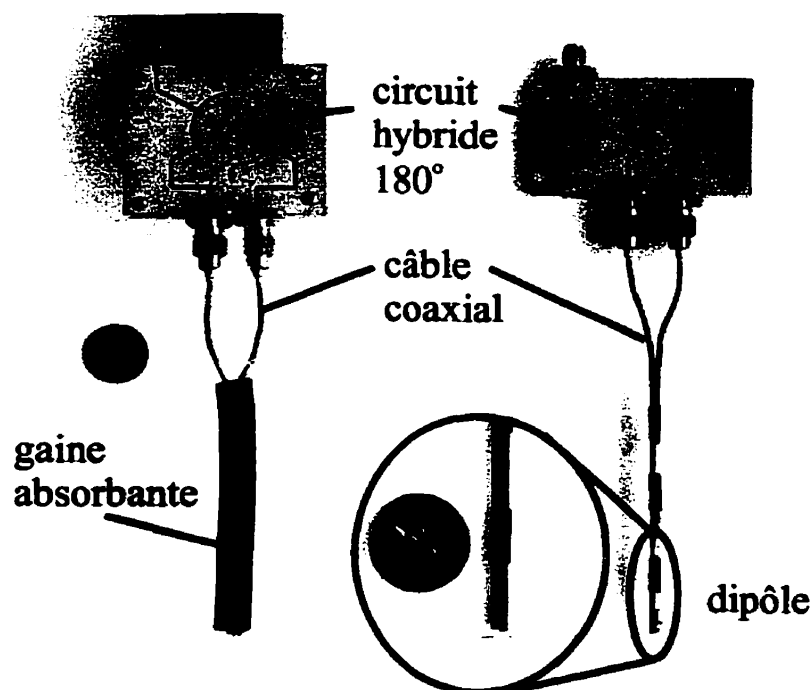
La conception de la sonde dipôle est une opération délicate et très importante car on doit s'assurer que celle-ci ne perturbe pas l'antenne sous test (AUT). De nombreuses sondes dipôles ont été fabriquées avant d'obtenir un prototype qui fonctionne correctement. Celui qui a été retenu est présenté à la Figure 3.3. Il est constitué de bouts de fil coaxial dont les extrémités sont dégainées et repliées afin de capter le champ électrique. Les câbles coaxiaux sont connectés aux 2 portes d'un coupleur hybride  $180^\circ$  (*rat-race*). La porte sommatrice est connectée à une charge de  $50\Omega$  et la porte différentielle est connectée à la porte réceptrice de l'analyseur de réseau. Les caractéristiques d'une sonde idéale doivent être les suivantes :

- capter les bonnes composantes du champ électrique,
- ne pas perturber le circuit sous test,
- capter le mode différentiel du courant,
- être équilibrée (*balanced*) (que l'amplitude du signal émis sur chacune des branches du dipôle soit identique).



**Figure 3.3:** Schéma de la sonde dipôle.

L'adaptation de la sonde n'est pas possible dans la configuration choisie car les monopôles doivent être très courts pour ne pas entrer en résonance et ne pas perturber l'antenne sous test. Ainsi, ils sont forcément non-adaptés. L'expérience a confirmé que cette sonde ne capte que la composante horizontale du champ sur les monopôles. Les gaines extérieures des câbles coaxiaux ont un effet de blindage qui empêchent de



**Figure 3.4:** Photographie de la sonde dipôle avec et sans gaine absorbante avec circuit hybride à 2,45 GHz à gauche et 5GHz à droite.

capter des composantes verticales. Enfin, le circuit hybride permet de sélectionner uniquement le mode différentiel des courants induits dans les dipôles. Le principal désavantage de cette conception consiste en la limitation de la fréquence de fonctionnement qui dépend du circuit hybride (deux circuits hybrides ont été réalisés, le premier à une fréquence de 2,45GHz et le second à 5GHz).

### 3.3 Le système de mesures en champ proche

Le système de mesures en champ proche a été décrit dans de précédents articles [6] [28]. Les techniques de mesures présentées dans ces articles emploient la technique de diffusion modulée afin de mesurer le champ incident de l'antenne sous test. La

méthode employée dans le cadre de ce travail mesure plutôt le paramètre  $S_{21}$  à l'aide de l'analyseur de réseau. En théorie, l'inconvénient de l'utilisation de l'analyseur de réseau par rapport à la méthode de la diffusion modulée est la sensibilité des mesures [28]. En effet, le câble coaxial qui connecte la sonde perturbe fortement le signal lorsqu'il reçoit le rayonnement de l'antenne sous test. C'est pourquoi la méthode de diffusion modulée est aussi fréquemment utilisée. Ce problème peut être contourné si le câble coaxial est placé suffisamment loin de la structure étudiée. Aussi, la sonde dipôle a été conçue pour minimiser les réflexions des ondes émises par l'antenne sous test et pour s'assurer de mesurer les bonnes composantes du champ électrique.

L'antenne sous test émet un champ incident  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  sur la sonde en mouvement. La tension en circuit ouvert  $V_{\text{prb}}$  (e.m.f.) est proportionnelle à  $S_{21}$ . À l'aide de l'équation 1.17, on peut tirer une relation très connue entre la tension de mesure aux bornes de la sonde  $V_l$  et le champ incident :

$$V_l = \frac{R_l}{(R_l + Z_{p/p})I^t(0)} \int_l \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \mathbf{J}^t dl \quad (3.1)$$

L'intégrale dans le membre de droite représente le calcul de l'impédance mutuelle (équation 2.1) développé dans le Chapitre 2.  $\mathbf{J}^t$  représente la distribution de courant électrique dans la sonde lorsqu'utilisée en émission. Cette distribution n'est pas connue précisément mais on peut l'approximer par une distribution de type sinu-

soïdale par bout (voir section 1.2.3).  $I^t(0)$  est le courant d'alimentation lorsque le dipôle est opéré en transmission.

### **3.4 La chambre anéchoïde**

Les mesures en champ lointain sont effectuées dans la chambre anéchoïde du laboratoire Poly-Grames. La distance entre l'antenne sous test et l'antenne réceptrice est de 1,90 mètre ( $\sim 16\lambda$ ). Une antenne cornet (à polarisation linéaire) a été utilisée comme antenne réceptrice.



## CHAPITRE 4

### VALIDATION EXPÉRIMENTALE

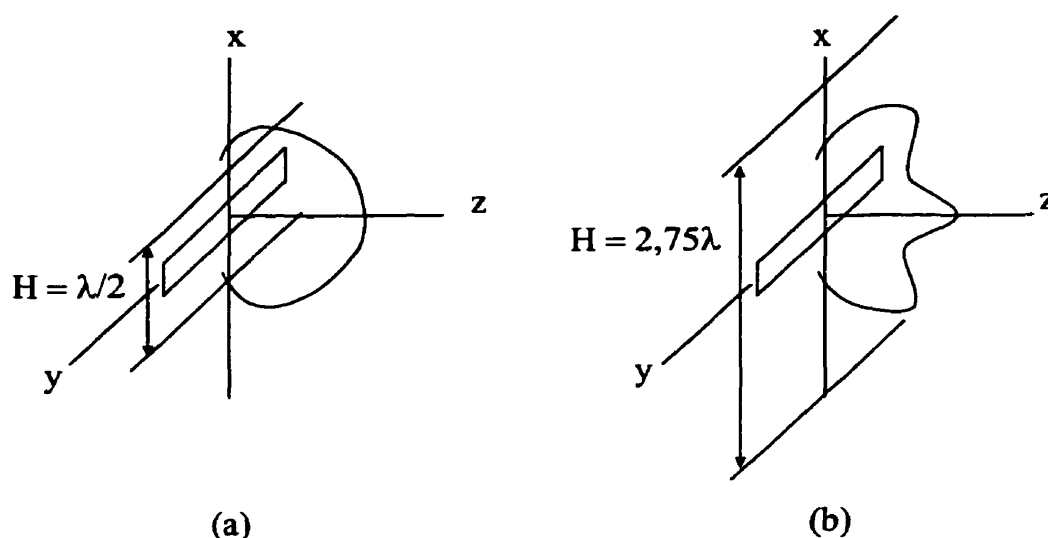
Le programme *Slot* a été utilisé pour prédire le diagramme de rayonnement en champ lointain de structures diverses. Laurin et al. [12] ont confirmé la validité du programme en comparant les résultats du diagramme de rayonnement en champ lointain d'une antenne *patch* et d'un réseau d'antennes *patch* posées sur un plan de masse à ceux obtenus dans une chambre anéchoïde.

La validation a ici été étendue dans le cadre de cette étude à d'autres types de structures : une simple fente alimentée par micro-ruban et une antenne fente couplée par une ligne coplanaire. Ces structures se prêtent bien à l'analyse des courants et du champ lointain au moyen de sources de courant magnétique. Par le principe d'équivalence, il est possible de définir des courants magnétiques équivalents dans les fentes plutôt que des courants électriques. Puisque la surface des fentes est plus petite que la surface de métal du plan de masse, le calcul s'effectue beaucoup plus rapidement en utilisant des sources de courant magnétique.

## 4.1 Antenne fente alimentée par micro-ruban

### 4.1.1 Conception de l'antenne fente

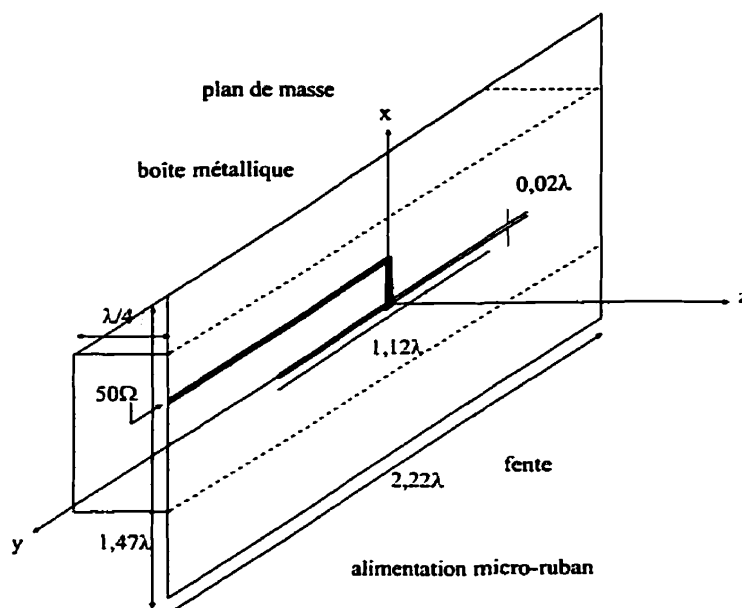
La structure d'une fente alimentée par micro-ruban est bien connue et son diagramme de rayonnement est montré dans [24] [11]. La Figure 4.1 montre que les dimensions finies du plan de masse engendrent des phénomènes de diffraction dont l'influence sur le diagramme de rayonnement en champ lointain est non-négligeable. La simplicité de cette structure permettra de mieux identifier les limites de l'algorithme de calcul de diffraction.



**Figure 4.1:** Champ lointain mesuré dans le plan  $xz$  d'antennes fente ( $\lambda/2 \times 0,1\lambda$ ) placées sur un plan de dimensions finies. Hauteur  $H$  du plan de masse : cas (a)  $H = \lambda/2$ , cas (b)  $H = 2,75\lambda$ . D'après Krauss [11].

Derrière l'antenne, la ligne d'alimentation micro-ruban et la fente sont couvertes par une boîte de métal placée à une distance de  $\lambda/4$  (court-circuit) afin de perturber

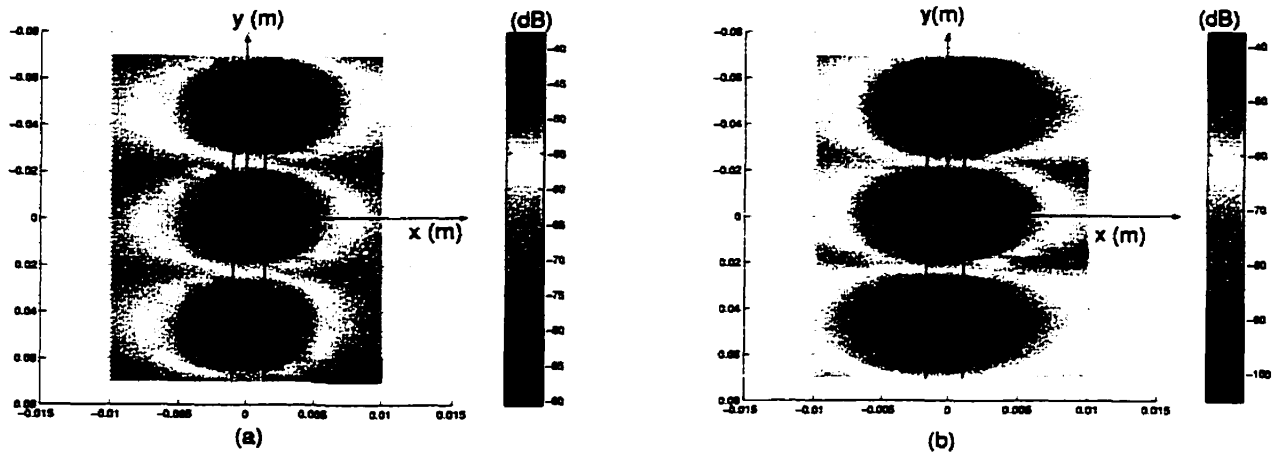
le moins possible l'adaptation. Il y a donc très peu de rayonnement arrière (du côté de la ligne de transmission) qui vient diffracter vers l'avant (du côté de la fente). De cette manière, le diagramme de rayonnement est déterminé par la taille de la fente et celle du plan de masse sur lequel les ondes diffractent. Les dimensions de la plaque du plan de masse sont choisies de telle sorte que l'on puisse noter l'effet de l'influence des rayons diffractés (voir Figure 4.1). En effet, plus la plaque est petite, plus les rayons diffractés sur le bord influent sur le diagramme de rayonnement. Le programme *Slot* possède une option qui permet de tenir compte des effets de diffraction sur les bords et les coins d'une plaque.



**Figure 4.2:** Dimensions de l'antenne fente alimentée par micro-ruban.

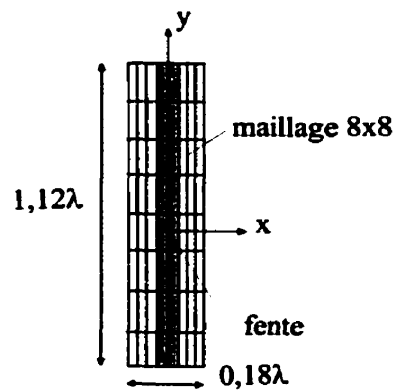
### 4.1.2 Mesures en champ proche et champ lointain

#### 4.1.2.1 Mesures en champ proche



**Figure 4.3:** Mesures en champ proche  $V_I$  de l'antenne fente à une fréquence de 2,45GHz ( $\lambda = 12,24cm$ ) pour deux orientations de sonde (a)  $\phi = 45^\circ$  (b)  $\phi = -45^\circ$ . La sonde est placée à une distance de 2mm de l'antenne sous test (0,016 $\lambda$ ).

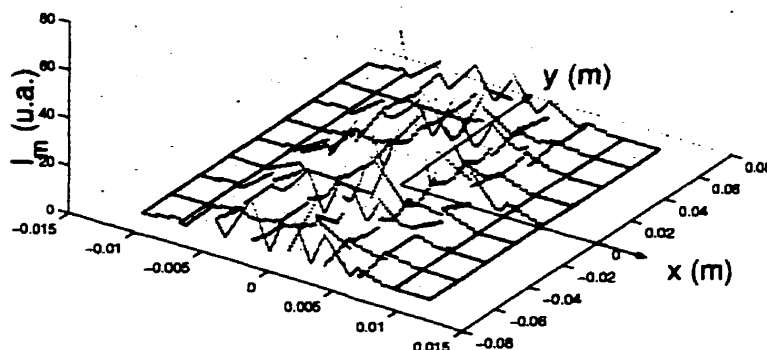
Les mesures en champ proche sont effectuées à une distance de l'antenne sous test de 2mm. On enregistre 400 points de mesure pour chaque orientation ( $\phi = -45$  et  $\phi = 45$ ) sur une surface de dimensions  $1,12\lambda \times 0,082\lambda$ .  $\phi$  est l'angle formé par l'axe des  $x$  et le dipôle de la sonde (donc cet angle est toujours contenu dans le plan  $xy$ ). Les résultats sont montrés à la Figure 4.3. La fente est symbolisée par les deux traits verticaux. À partir de ces mesures, il est maintenant possible de retrouver les coefficients des courants sources en choisissant auparavant l'emplacement de ceux-ci.



**Figure 4.4:** Maillage de la fente. Une grille de  $8 \times 8$  forme un total de 207 dipôles.

#### 4.1.2.2 Maillage de la grille de courants

En choisissant une surface de maillage plus grande et en gardant la même taille de cellule, on augmente de manière importante le temps de calcul. Il y a donc un compromis à faire sur les dimensions de la surface de maillage des courants sources inconnus. En effet, soit on ne fait aucune supposition sur l'emplacement des sources et on maille toute la surface impliquant un long temps de calcul, soit on accepte de restreindre la surface des courants sources sur une petite surface pour diminuer le nombre d'inconnues et le temps de calcul. Les dimensions de la surface de maillage choisies sont  $0,18\lambda \times 1,14\lambda$  (voir Figure 4.4). Elles dépassent de très peu les dimensions de la fente. Les 64 cellules du quadrillage forment un total de 207 dipôles. Le système linéaire à résoudre comprend donc 800 points de mesure et 207 inconnues à déterminer, soit un rapport de surdimensionnement de l'ordre de 4.



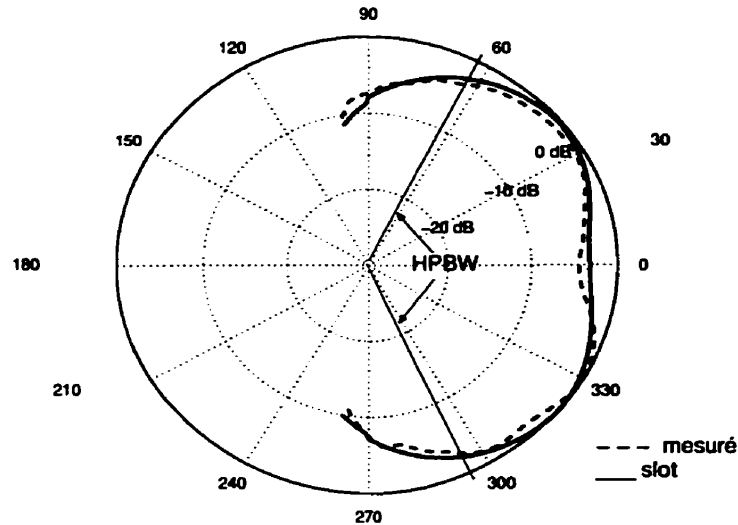
**Figure 4.5:** Courants magnétiques autour de la fente calculés à partir des mesures en champ proche

#### 4.1.2.3 Détermination des courants magnétiques

Les coefficients des courants magnétiques sont recalculés à partir de mesures en champ proche. Les résultats sont montrés à la Figure 4.5. L'échelle des courants est arbitraire. On remarque sur cette figure que la distribution des courants magnétiques est cohérente avec la distribution des mesures en champ proche. Les courants magnétiques ne sont donc pas seulement une représentation fictive des radiations émises par l'antenne, ils permettent aussi de représenter les courants réels circulant sur la surface de l'antenne (nous avons cependant placé la surface de maillage près de la fente dans cette étude).

On observe aussi que les valeurs des courants de la solution sont peu régulières. La solution présente en effet un problème de rugosité, et ce sujet sera traité plus loin dans le Chapitre 6 sur les techniques de régularisation.

#### 4.1.2.4 Calcul du champ lointain

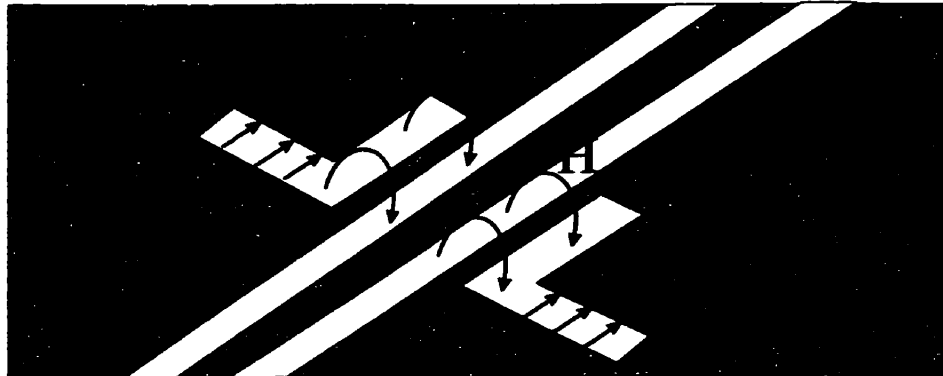


**Figure 4.6:** Diagramme de champ lointain mesurés et recalculés par *Slot* ( $f=2,45\text{GHz}$ ).  $|E_\theta|$  mesuré dans le plan E

Le rayonnement arrière n'apparaît pas sur le diagramme de champ lointain. Rappelons qu'une boîte en métal est posée derrière la fente afin de ne pas influencer le rayonnement avant. On note sur la Figure 4.6 que les mesures expérimentales dans la chambre anéchoïde présentent un creux dans la direction principale ( $\theta = 0$ ). Celui-ci est causé par le rayonnement avant dirigé vers les bords de la plaque jusqu'au rebord, puis diffracté. Enfin, notons que la largeur de faisceau à mi-puissance (*HPBW*) calculée à partir du diagramme de champ lointain obtenu dans la chambre anéchoïde est de  $127^\circ$  alors qu'il est de  $135^\circ$  avec le programme *Slot*. Cet écart entre la valeur obtenue par *Slot* et dans la chambre anéchoïde représente une erreur relative de 6%

et peut être expliqué par certains phénomènes de diffraction aux bords de la plaque qui sont difficilement modélisables avec le logiciel *Slot*.

## 4.2 Antenne fente couplée par une ligne coplanaire



**Figure 4.7:** Principe de fonctionnement de l'antenne fente couplée par ligne coplanaire. Configuration du champ électrique et magnétique dans la région de couplage, d'après Garcia [23].

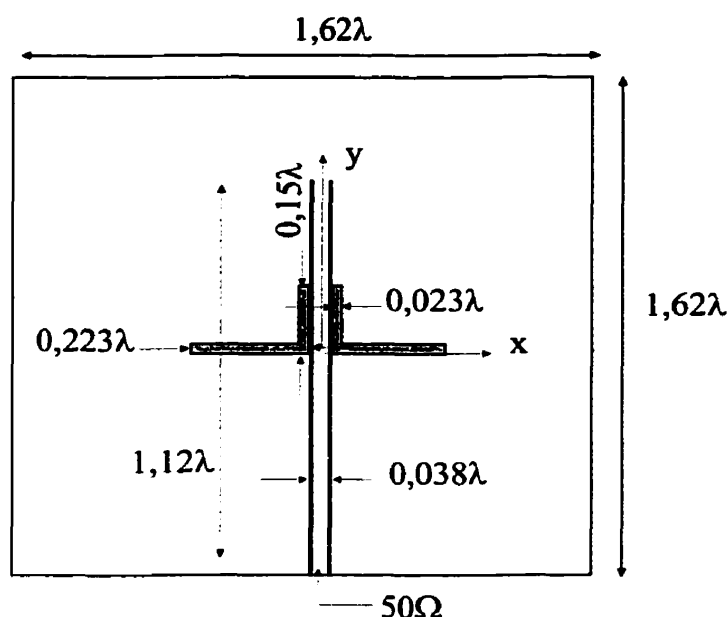
La précédente étude de l'antenne fente nous a permis de valider le calcul de champ lointain du programme *Slot*. Nous allons maintenant étudier une antenne contenant plusieurs éléments afin d'évaluer les capacités du programme *Slot* à calculer le champ lointain de structures plus complexes.

### 4.2.1 Principe de fonctionnement

La structure étudiée dans cette section a déjà été présentée dans [23], c'est pourquoi son principe sera brièvement expliqué ici. Une ligne de transmission coplanaire alimente par couplage du champ magnétique deux fentes disposées de part et d'autre de la ligne de transmission (voir Figure 4.7). Ces fentes génèrent un champ électrique



sur leur longueur. Les fentes parallèles à la ligne de transmission produisent un rayonnement nul en champ lointain car les courants circulant sur celles-ci sont déphasés de  $180^\circ$ . Par contre, les fentes perpendiculaires produisent des contributions au rayonnement en champ lointain qui s'additionnent car les courants circulant sur celles-ci sont en phase. Le plan parallèle à la ligne de transmission est donc le plan **E** (voir Figure 4.11). L'impédance caractéristique de la ligne est de  $50\Omega$ . La fente est placée en série avec une ligne de transmission terminée par un court-circuit. Celle de la fente est aussi proche de  $50\Omega$ . Les différentes dimensions du circuit sont données à la Figure 4.8. Les dimensions du plan de masse sont de  $1,62\lambda \times 1,62\lambda$ .



**Figure 4.8:** Dimensions de l'antenne fente couplée par ligne coplanaire

La conception de cette antenne a été effectuée sur *Momentum*, logiciel qui permet de visualiser le champ lointain. Comme nous le verrons plus loin, les prédictions de champ lointain faites avec *Momentum* sont inexactes, étant donné que ce logiciel ne

tient pas compte des dimensions finies du plan de masse. Globalement, *Slot* permettra d'obtenir de meilleurs résultats.

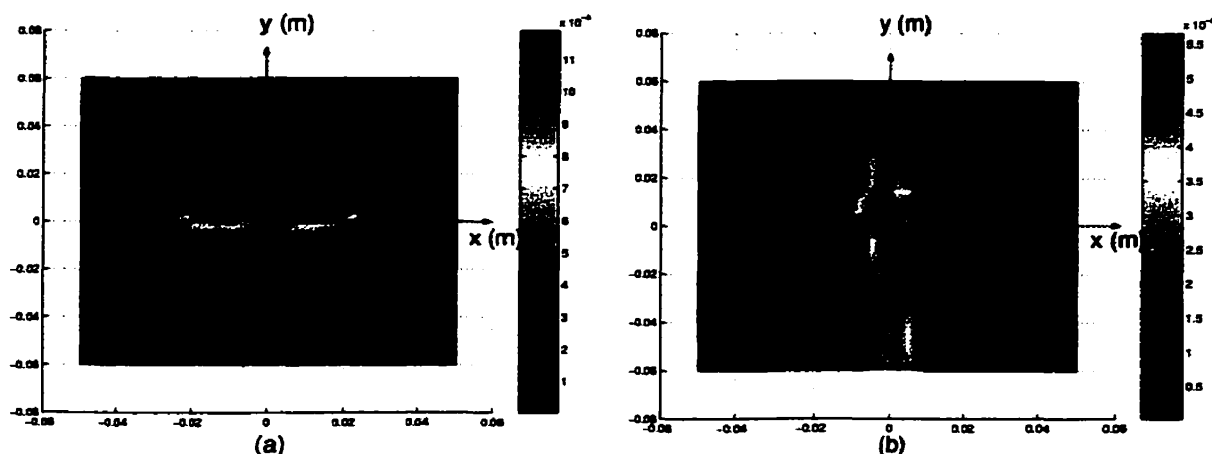
#### 4.2.2 Mesures en champ proche et en champ lointain

Les étapes permettant d'obtenir le champ lointain à partir des mesures en champ proche sont les mêmes que celles de l'étude précédente : effectuer les mesures, déterminer un maillage de dipôles à la surface de l'antenne sous test, calculer les coefficients des courants, et déterminer le champ lointain à partir des courants en tenant compte des effets de diffractions sur les bords de la plaque.

##### 4.2.2.1 Mesures en champ proche

Les mesures en champ proche à 2,45GHz montrées à la Figure 4.9 sont prises à une distance de  $2mm$  de l'antenne sous test selon deux orientations ( $\phi = 90^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$ ). Celles-ci sont montrées sur une échelle linéaire pour mieux les visualiser. Le balayage de la sonde a été effectué sur une grille de  $30 \times 30$  et couvre une surface de  $0,8\lambda \times 0,8\lambda$  ( $10cm \times 10cm$ ), pour un total 900 points de mesure pour chacune des orientations.

Notons que la Figure 4.9 (b) permet d'observer les effets de débalancement de la ligne d'alimentation coplanaire. Près de la porte d'entrée, le courant est beaucoup plus fort du côté droit de la ligne que du côté gauche. Alors qu'il aurait été impossible de détecter ce phénomène avec les mesures en champ lointain, ce dernier est facilement observable à l'aide des mesures en champ proche. Cela constitue un

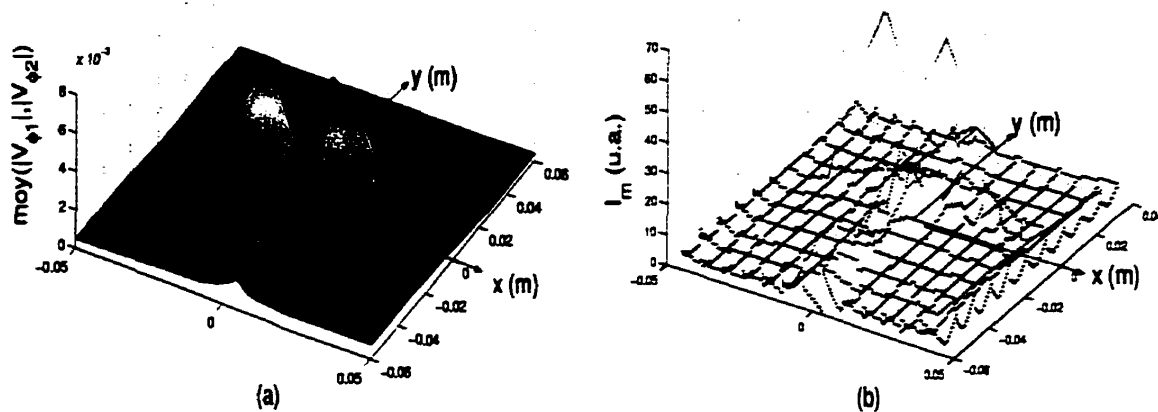


**Figure 4.9:** Mesures en champ proche  $V_l$  de l'antenne à une fréquence de 2,45GHz ( $\lambda = 12,24cm$ ), selon deux orientations (a)  $\phi = 90^\circ$  et (b)  $\phi = 0^\circ$ .

atout supplémentaire pour la méthode des mesures en champ proche : la capacité de détecter les problèmes de balancement de courant dans les circuits micro-ondes. Nous verrons dans la section 6.7.2 qu'il est possible de retrouver les courants le long d'une ligne d'alimentation à l'aide de la technique de régularisation.

#### 4.2.2.2 Maillage de la grille de courants

Le maillage de la grille de courants contient 100 cellules (grille  $10 \times 10$ ) et occupe une surface de  $0,8\lambda \times 0,8\lambda$  ( $10cm \times 10cm$ ) autour des fentes rayonnantes, soit la même surface que les mesures en champ proche. Ces cellules forment un ensemble de 319 dipôles, et ainsi le système linéaire à résoudre contient 1800 points de mesure et 319 coefficients inconnus, soit un rapport de surdimensionnement de l'ordre de 6.



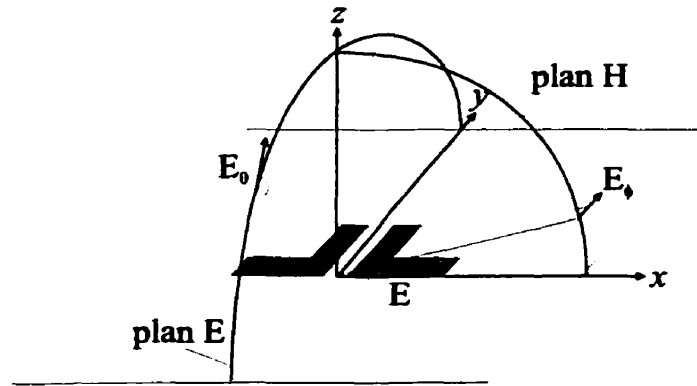
**Figure 4.10:** (a) Moyenne du module des mesures en champ proche dans les 2 orientations. (b) Les courants magnétiques autour de la fente sont calculés à partir des mesures en champ proche.

#### 4.2.2.3 Détermination des courants magnétiques

La Figure 4.10 (a) présente les mesures en champ proche moyennées selon les deux orientations. Cette figure sert de point de comparaison à la Figure 4.10 (b) qui montre les courants magnétiques (l'échelle des courants est arbitraire). On observe que les courants représentent fidèlement le champ proche. Il existe toujours des problèmes de régularité dans la solution. Ce problème sera abordé à nouveau lors de l'étude d'une structure semblable dans la section 6.8.

#### 4.2.2.4 Calcul du champ lointain

Nous pouvons maintenant calculer le diagramme de rayonnement en champ lointain à partir de la solution sur les sources de courant et le comparer à une mesure effectuée dans la chambre anéchoïde. La Figure 4.12 (a) donne le champ lointain



**Figure 4.11:** Plans **E** et **H** de l'antenne fente couplée par guide d'onde coplanaire.

$|E_\theta|$  dans le plan **E** et la Figure 4.12(b) le champ  $|E_\phi|$  dans le plan **H**. (Ceux-ci sont définis à la Figure 4.11.) Il existe plusieurs différences entre les résultats obtenus expérimentalement et à l'aide des logiciels *Momentum* et *Slot*, nous allons maintenant tenter de les expliquer.

Seul le diagramme de rayonnement arrière calculé par le logiciel *Momentum* est montré à la Figure 4.12. En effet, ce logiciel analyse des structures planaires et ne peut pas tenir compte de l'effet de la boîte métallique ni des phénomènes de diffraction du plan de masse. Les rayonnements arrières obtenus avec le programme *Slot* et dans la chambre anéchoïde ne sont pas montrés sur les figures. En effet, les rayonnements arrières sont dans ce cas causés par les phénomènes de diffraction et il est difficile de les mesurer.

Les largeurs de faisceau à mi-puissance (**Half Power Beam Width**) dans les différents plans sont données au Tableau 4.1. La variable  $\varepsilon_{rel}$  représente l'erreur relative

**Tableau 4.1:** Largeurs à mi-puissance dans différents plans, d'après la Figure 4.12.

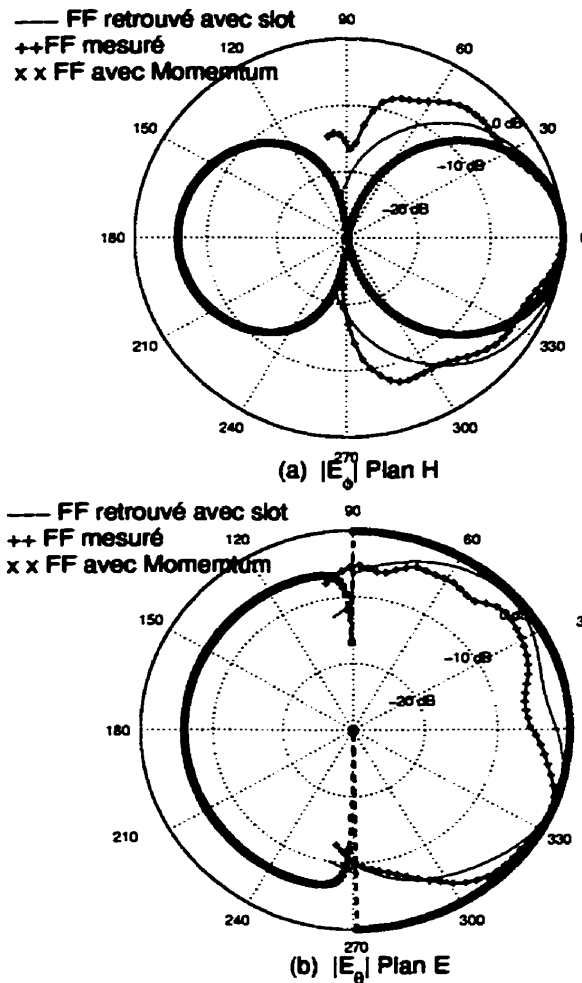
	$ E_\theta $ - plan <b>E</b>		$ E_\phi $ - plan <b>H</b>	
	<i>HPBW</i>	$\varepsilon_{rel}$	<i>HPBW</i>	$\varepsilon_{rel}$
<i>Slot</i>	117°	9%	70°	32%
expérimental	129°	-	53°	-
<i>Momentum</i>	180°	54%	51°	4%

sur la largeur du faisceau à mi-puissance entre les logiciels (*Slot* et *Momentum*) et la valeur expérimentale mesurée en chambre anéchoïde.

Le champ lointain calculé par le programme *Slot* dans le plan **E** (figure 4.12 (b)) correspond à celui obtenu expérimentalement dans la chambre anéchoïde :  $HPBW_{Slot} = 117^\circ$  et  $HPBW_{expe} = 129^\circ$ . Toujours dans ce même plan, le logiciel *Slot* montre les phénomènes de diffraction qui sont visibles sur le lobe avant. Cependant, le logiciel *Momentum* ne tient pas compte de ces phénomènes de diffraction et en conséquence le lobe avant calculé dans ce cas a la forme d'un demi-cercle  $HPBW_{expe} = 180^\circ$ .

La correspondance du résultat calculé dans le plan **H** (figure 4.12 (a)) est cependant moins bonne :  $HPBW_{Slot} = 70^\circ$  et  $HPBW_{expe} = 53^\circ$ . Comme nous allons le voir, cela est sans doute causé par certaines limitations de la routine de calcul de diffraction du programme *Slot*. Avant de donner une explication à ce sujet, mentionnons que la routine de calcul de diffraction combine l'optique géométrique et la théorie uniforme de la diffraction (*UTD*). Elle tient compte des effets de :

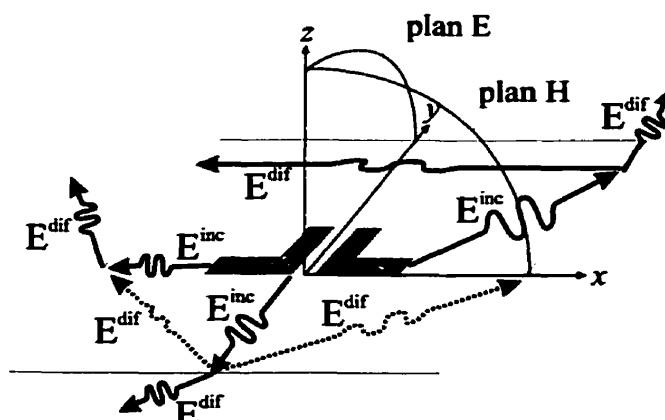
- diffraction de bord de premier ordre,



**Figure 4.12:** Diagrammes de champ lointain mesurés et recalculés par *Slot* ( $f=2,45\text{GHz}$ ). (a)  $|E_\phi|$  mesuré dans le plan **H**. (b)  $|E_\theta|$  mesuré dans le plan **E**.

- diffraction de bord de second ordre,
- diffraction double de bord de premier ordre,
- diffraction des coins de premier ordre.

Or il semble que cette routine semble donner systématiquement de meilleurs résultats dans le plan **E** que dans le plan **H** (les validations données dans [12] vont dans le même sens). Une hypothèse expliquant cette différence est que le programme



**Figure 4.13:** Schéma montrant quelques calculs de diffraction. La diffraction simple et la diffraction double sur deux bords parallèles sont calculées entre autre (traits pleins), mais pas la double diffraction sur deux bords non-parallèles (traits pointillés).

*Slot* ne calcule la double diffraction de bord de premier ordre que pour un rayon se propageant sur deux bords parallèles. En effet, le calcul d'un rayon diffractant consécutivement sur deux cotés non-parallèles de la plaque n'est pas effectué. Enfin, cela expliquerait en partie les résultats obtenus dans le plan H.

### 4.3 Conclusion

L'étude de deux structures rayonnantes à fente a permis de valider expérimentalement le programme informatique *Slot*. Le programme permet de déterminer le diagramme de rayonnement de structures relativement complexes comme l'antenne fente couplée par ligne de transmission coplanaire. Dans le meilleur cas, on a obtenu une erreur relative sur la largeur du faisceau à mi-puissance de 9% et de 32% dans le pire cas. Ces résultats sont cependant meilleurs que ceux obtenus avec le logiciel *Momentum* (4% et 51%). Le programme *Slot* semble toutefois limité dans la taille du



plan de masse. Certains phénomènes de diffraction non calculés dans le programme deviennent importants lorsque le plan de masse est petit ( $\sim \lambda$ ). L'ajout de ce calcul permettrait d'obtenir une meilleure précision dans les mesures en champ lointain dans le plan **H**.

## CHAPITRE 5

### ANALYSE DES SOURCES D'ERREUR

L'analyse des sources d'erreur expérimentales constitue une partie importante de ce travail car elle permet de quantifier la validité de la méthode. On pourrait la contester (malgré la bonne qualité des prédictions des champs lointains) en alléguant que la perturbation de la sonde est non-négligeable et que les études sur les sources d'erreur sont incomplètes. L'intention initiale de ce chapitre était de développer des métriques quantifiant les erreurs et de faire une étude exhaustive de l'influence des paramètres expérimentaux sur ces métriques. Cependant, non seulement cette étude est très complexe, mais elle dépend aussi du contexte de l'étude. Elle n'offre donc pas suffisamment de valeur. Les résultats de cette recherche seraient donc difficilement extrapolables à un quelconque problème de mesure en champ proche. C'est pourquoi, nous avons adopté une approche utilisée dans le traitement d'image en général. Celle-ci consiste à développer des techniques robustes (à l'abri des problèmes de mauvais conditionnement) qui permettent de quantifier les sources d'erreur (en comparant avec un système connu) et d'en minimiser l'effet. Ainsi peu importe l'origine de la source (ou des sources) d'erreur, la méthode cherchera à la réduire par le biais d'un critère de minimisation.

Malgré l'apport de cet outil, l'ingénieur de test doit malgré tout effectuer les mesures dans les conditions expérimentales qui minimisent l'impact des sources d'er-

reur. Dans un premier temps, les différentes sources d'erreur sont énumérées et leur impact est évalué d'une manière purement qualitative et empirique. Dans un second temps, une analyse expérimentale de la perturbation de la sonde est effectuée. Celle-ci permet de montrer que l'impact de la sonde sur la détermination des courants sources est minime.

### **5.1 Analyse qualitative des sources d'erreur**

Dans cette section, on développe une liste des différentes sources d'erreur. Ensuite, on tente de caractériser chacune d'elle (erreur aléatoire ou erreur systématique). Ces sources d'erreur sont limitées au contexte d'utilisation qui dépend du montage expérimental. Ce dernier est décrit au Chapitre 3.

Une erreur systématique [2] est une erreur générée par une mauvaise calibration de l'équipement ou un biais de la part de l'observateur. Dans certains cas, des corrections sur les données expérimentales peuvent être effectuées pour compenser les erreurs systématiques, et ce même si le type et l'étendue de l'erreur sont connus. Dans d'autres cas, les incertitudes résultant de ces erreurs doivent être estimées et combinées avec les incertitudes des fluctuations statistiques. Nous allons énumérer les sources d'erreur et tenter de les caractériser sur une base empirique. Celles-ci seront classées en deux catégories principales : les sources d'erreur expérimentales et les sources d'erreur de modélisation.

### 5.1.1 Sources d'erreur expérimentales

Les sources d'erreur expérimentales sont associées aux mesures (mesures en champ proche, dimensions de la sonde, mesures de position de la sonde, etc.). Elles sont énumérées dans l'ordre décroissant d'importance (c'est-à-dire d'influence sur la "qualité" du résultat après détermination des sources). Cet ordre d'importance est évidemment basé sur une connaissance empirique de notre montage expérimental. On appelle erreurs systématiques les erreurs qui, à l'intérieur d'un ensemble de mesures, engendrent un biais dans le calcul des sources. Les erreurs aléatoires dont les effets sont presque négligeables dans notre contexte sont associées à un bruit blanc.

- **L'erreur sur la distance de prise de mesures**, due à la mauvaise lecture de la distance entre le plan de la sonde et le plan contenant les dipôles magnétiques. Dans la méthode des sources équivalentes (CME), le plan où l'on dispose les courants peut être à une hauteur arbitraire donc, en principe, une erreur sur la position n'a pas d'influence. Par contre, si on traite des antennes planaires, on peut se servir des connaissances *a priori* de la géométrie des fentes pour localiser les courants magnétiques et ainsi réduire le nombre de coefficients à déterminer. Pour ce cas, il est important que les CME soient le plus près possible de l'emplacement réel des fentes sur l'antenne. La position relative de la sonde devient donc importante. Cependant, nous verrons plus loin que dans une certaine mesure, l'erreur de distance peut être corrigée. Ce

sujet est développé dans le chapitre traitant des techniques de régularisation (section 6.6).

- **L'erreur sur la distance non constante de prise de mesures.** L'appareil de montage enregistre la hauteur du plan de mesure. Cette distance mesurée avec un pied à coulisse est enregistrée avec les données de positions et est considérée comme constante pour toutes les positions. Si le plan de mesure n'est pas parallèle au plan de la structure contenant les sources de courant, alors les mesures seront faussées. En effet, la mesure enregistrée correspondra à une position différente de celle qui sera enregistrée. L'erreur de non-coplanarité engendre un biais dans le calcul des courants. Il est impossible de détecter cette erreur, à moins de savoir à l'avance que le rayonnement est constant.
- **L'erreur sur les mesures de tension de sonde.** On peut aussi faire l'hypothèse que l'erreur commise sur cette lecture est une erreur aléatoire. En effet, cette mesure est proportionnelle au coefficient de transmission  $S_{21}$ . L'erreur aléatoire est inversement proportionnelle à la plage dynamique de l'analyseur de réseau qui est de  $60dB$  (voir chapitre sur le montage expérimental 3). Cette source d'erreur devient non négligeable si les valeurs mesurées de  $S_{21}$  sont au bas de la plage. L'ingénieur de test doit pour minimiser cette erreur, s'assurer qu'il ne mesure pas un couplage trop faible et augmenter le niveau de signal au besoin (cela dépend de la taille de la sonde et de la distance de prise de mesures).

- **L'erreur aléatoire sur les positions associées aux mesures de tensions.**

Cette erreur est donnée par le fabricant de l'appareil de positionnement et est de l'ordre du  $\mu m$ .

- **L'erreur systématique commise sur l'orientation de sonde.** L'ordre de grandeur de cette erreur est relativement petit. De plus, son impact sur le calcul des sources est également estimé comme étant faible. En effet, des études empiriques ont montré qu'une faible variation dans l'angle d'orientation de la sonde n'entraînait pas une erreur majeure.

### **5.1.2 Sources d'erreur de modélisation**

On appelle sources d'erreur de modélisation des erreurs qui sont soit créées par une trop grande simplification du phénomène physique de mesure en champ proche (c'est-à-dire que l'on néglige les réflexions multiples, les objets métalliques près du montage qui peuvent modifier le signal, etc.), soit engendrées par une méconnaissance de la géométrie de l'antenne (ou circuit) sous test. Nous allons maintenant donner plus de détails concernant ces deux distinctions.

#### **5.1.2.1 Simplification du modèle de mesure en champ proche**

Les conditions principales permettant d'utiliser la technique CME sont les suivantes : on suppose que l'environnement lointain n'influence pas le circuit sous test (réflexion sur des objets métalliques lointains, etc.), et on suppose que la sonde

utilisée ne perturbe pas beaucoup l'antenne sous test. Si ces conditions ne sont pas vérifiées alors la méthode n'est plus applicable. Dans la pratique, ces sources d'erreur sont présentes, aussi faibles soient-elles. À la lumière de ce qui vient d'être expliqué, voici une liste des différentes sources d'erreur :

- **Erreurs sur les mesures de tension causées par la perturbation de la sonde sur le circuit sous test.** Erreurs causées par les perturbations extérieures du montage expérimental. Ces perturbations proviennent des multiples réflexions des ondes réfléchies sur les différentes parties du montage. On suppose que les réflexions multiples n'ont pas d'effet significatif sur la mesure du paramètre  $S_{21}$ . Les différentes validations effectuées dans le Chapitre 4 et dans la section 5.2 nous laisse croire que cet effet est négligeable.
- **Erreurs causées par la méconnaissance des caractéristiques de la sonde.** Le programme *Slot* modélise la sonde par un dipôle idéal, dont la longueur et le rayon du fil sont connus. On suppose aussi que les courants circulant dans les branches du dipôle sont égaux de sorte que le rayonnement est symétrique de chaque côté. On suppose également que la gaine extérieure du câble coaxial alimentant les deux dipôles n'a aucun effet sur la lecture du paramètre  $S_{21}$ . Cette hypothèse sera vérifiée dans la section 5.2.

### **5.1.2.2 Problème de localisation de la source**

Les erreurs de modélisation engendrées par une méconnaissance de la topologie du circuit sont liées au problème de localisation de la source. Dans le cas où la surface conductrice est grande ou lorsque l'ingénieur de test n'a pas connaissance de la géométrie du circuit, celui-ci doit placer un maillage de sources équivalentes sur toute la surface de l'antenne. Cela se répercute sur la convergence de la solution du problème inverse, puisqu'on doit augmenter le nombre d'inconnues. Ce problème n'est pas traité car il dépasse le cadre de ce projet.

## **5.2 Analyse expérimentale de la perturbation de la sonde**

### **5.2.1 Théorie**

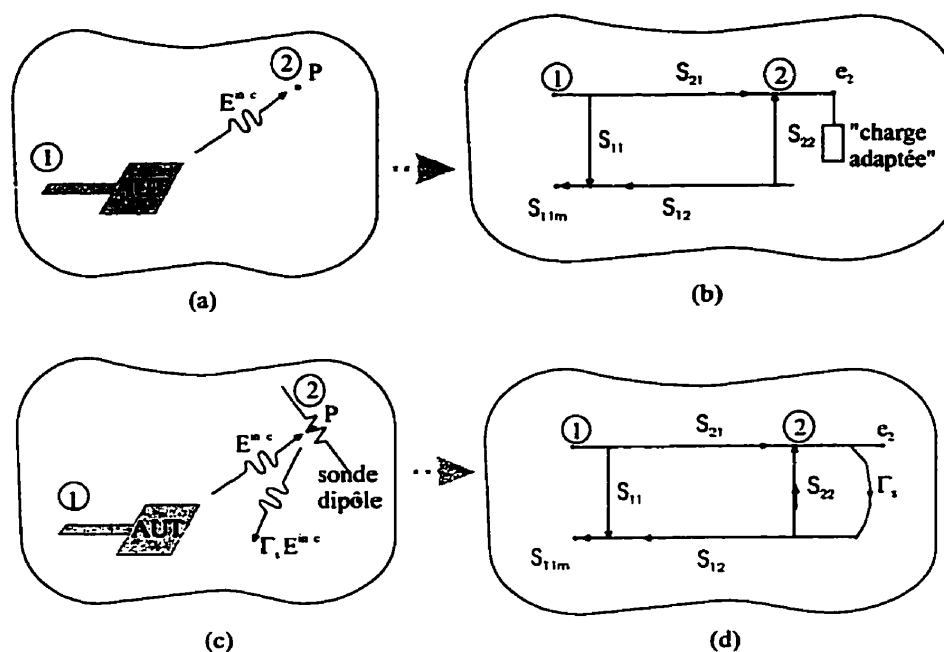
La perturbation de la sonde sur l'antenne sous test a été étudiée par Ouardirhi [16] dans un contexte similaire (une méthode utilisant des courants électriques équivalents et une sonde boucle). Il a été démontré que la sonde avait une influence relativement faible sur la détermination des courants sources. Cette démonstration est basée sur une comparaison entre les valeurs des courants sources déterminées avec des mesures qui tiennent compte de la présence de la sonde et des mesures ne tenant pas compte des perturbations pouvant être causées par la sonde. On utilisait une simulation numérique dans les deux cas. Cette étude a montré que l'erreur relative moyenne causée par la présence de la sonde sur les courants sources est de l'ordre de 1%.

Une étude expérimentale de la perturbation de la sonde va nous permettre de



vérifier si l'influence de la sonde dipôle (identique au modèle montré à la Figure 3.3) a un effet négligeable sur les mesures de  $S_{21}$ .

Si la perturbation de la sonde est constante, alors le coefficient de réflexion à l'entrée de la sonde  $\Gamma_s$  est constant lui aussi. Un développement mathématique va nous permettre d'établir un rapport entre  $\Gamma_s$  et les paramètres  $S$  mesurés (appelés  $S_{11m}$  et  $S_{21m}$ ).



**Figure 5.1:** (a) modèle de l'AUT sans sonde. (b) Le système équivalent sans sonde. Le point  $P$  où on reçoit le signal est remplacé par la charge adaptée. (c) modèle de l'AUT avec une sonde dipôle au point  $P$ . (d) Le système équivalent avec sonde. La charge adaptée est maintenant un terme de réflexion vers l'AUT.

La Figure 5.1 montre l'équivalence entre le modèle physique de l'antenne sous test avec et sans sonde et sa représentation sous forme de diagramme de fluence. À partir de cette figure, définissons les deux portes : la porte ① représente l'ali-

mentation de l'antenne, la porte ② représente un point de mesure de champ dans l'espace.  $S_{11}$  représente le coefficient de réflexion de l'antenne sous test sans la sonde dans l'environnement.  $S_{22}$  tient compte des champs réfléchis par l'antenne sous test.  $S_{21m}$  représente les pertes d'insertion entre l'antenne et la sonde. L'indice  $m$  signifie *mesuré*.  $e_2$  est le signal mesuré à la porte ②. La Figure (a) montre le modèle initial constitué de l'antenne sous test sans la sonde et la Figure (b) son système équivalent. Puisque le point de mesure  $P$  est une sonde ponctuelle virtuelle, celle-ci n'a aucune influence sur l'antenne sous test. Ainsi dans le diagramme de fluence équivalent (b), à la place du point de mesure  $P$  on trouvera une charge adaptée.  $S_{11m}$  représente le coefficient de réflexion à la porte d'entrée de l'antenne sous test. Dans le cas de la Figure (b), l'antenne n'est perturbée par aucun signal :  $S_{11m} = S_{11}$  et  $e_2 = S_{21}$ . Nous verrons plus loin que ces deux expressions changent lorsqu'on place une sonde au point  $P$ .

À la Figure (c), On insère maintenant une sonde au point  $P$ , (peu importe sa géométrie, mais dans le cas présent il s'agit d'une sonde dipôle). La sonde réfléchit un signal vers l'AUT, ce qui est équivalent à un terme de réflexion  $\Gamma_s$ , montré à la Figure (d). Notons que  $\Gamma_s$  n'est pas égal au coefficient de réflexion à l'entrée de la sonde. Il représente plutôt la réflexion d'une onde causée (voir Figures (c) et (d)) par la présence de la sonde dans l'environnement de l'antenne :

Une analyse du diagramme de fluence de la Figure (d) nous donne, après quelques manipulations,  $S_{11m}$  le coefficient de réflexion mesuré en présence de la sonde au point

$P$  :

$$S_{11m} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_s}{1 - \Gamma_s S_{22}} \quad (5.1)$$

On obtient aussi  $e_2$  :

$$e_2 = \frac{S_{21}}{1 - \Gamma_s S_{22}} \quad (5.2)$$

Aussi  $S_{21m}$  est directement proportionnel au champ incident  $e_2$  mesuré au point  $P$  (porte ②) :

$$S_{21m} = c e_2 = \frac{c S_{21}}{1 - \Gamma_s S_{22}} \quad (5.3)$$

où  $c$  est une constante. Ces trois dernières équations nous montrent que  $S_{11m}$  et la mesure de la sonde  $S_{21m}$  sont toutes les deux affectées par les réflexions multiples entre la sonde et l'antenne. Sachant que le système est réciproque ( $S_{21} = S_{12}$ ), l'équation 5.3 permet de réécrire 5.1 :

$$\frac{S_{11m} - S_{11}}{\left(\frac{S_{21m}}{c} (1 - S_{22} \Gamma_s)\right)^2} = \frac{\Gamma_s}{(1 - S_{22} \Gamma_s)} \quad (5.4)$$

L'équation 5.4 s'écrit, après quelques manipulations :

$$\frac{c^2(S_{11m} - S_{11})}{S_{21m}^2} = \Gamma_s(1 - S_{22} \Gamma_s) \quad (5.5)$$

En posant  $c = 1$  et en introduisant une nouvelle constante  $K$ , l'équation 5.5 peut être réécrite :

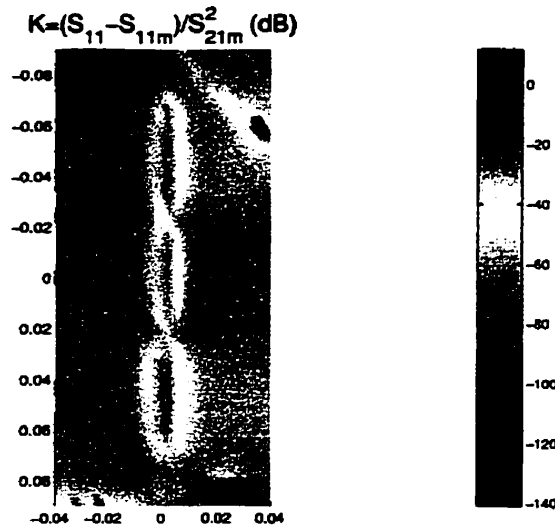
$$K = \frac{S_{11m} - S_{11}}{S_{21m}^2} = \Gamma_s(1 - \Gamma_s S_{22}) \quad (5.6)$$

Nous venons d'établir une relation entre le paramètre  $S_{11m}$ , le coefficient de réflexion de l'AUT en présence de la sonde et le coefficient de réflexion  $\Gamma_s$ . Dans la prochaine section, nous allons vérifier expérimentalement si cette dernière expression est constante en mesurant  $S_{11m}$ ,  $S_{11}$  et  $S_{21m}$ .

### 5.2.2 Résultats

En théorie, si l'antenne sous test n'est pas perturbée par la sonde, alors  $\Gamma_s = 0$  et  $K = 0$  aussi ( $S_{11m} = S_{11}$ ). En pratique, la perturbation n'est pas nulle et le mieux que l'on puisse espérer est que  $K$  varie peu en fonction de la position. D'après l'équation 5.6, si le coefficient de réflexion  $S_{11m}$  est constant pour toute position de la sonde au dessus du circuit,  $K$  devrait l'être aussi.

La Figure 5.2 présente les valeurs de  $K$  pour différentes positions. L'antenne sous test étudiée est une antenne fente (la même que celle étudiée dans la section



**Figure 5.2:** Le rapport  $K$  pour différentes positions de la sonde au dessus de l'antenne sous test (antenne fente)

4.1). L'emplacement de la fente est visible sur la Figure 5.2. De plus, la variation de l'amplitude des valeurs de  $K$  est de l'ordre de  $10^2$ . Les valeurs ne sont pas constantes contrairement à ce que l'hypothèse de non perturbation prévoyait plus tôt. Le fait que  $\Gamma_s(1 - S_{22}\Gamma_s)$  (c'est-à-dire  $K$ ) subisse de grandes fluctuations n'est pas surprenant. En fait, la réflexion  $\Gamma_s$  causée par la sonde est à la base de la technique de diffusion modulée dont l'usage est largement répandu [28] depuis plusieurs années. Par contre dans cette technique, on néglige toujours les réflexions multiples entre la sonde et l'antenne, c'est-à-dire que l'on a :

$$\Gamma_s(1 - S_{22}\Gamma_s) \approx \Gamma_s \quad (5.7)$$

et

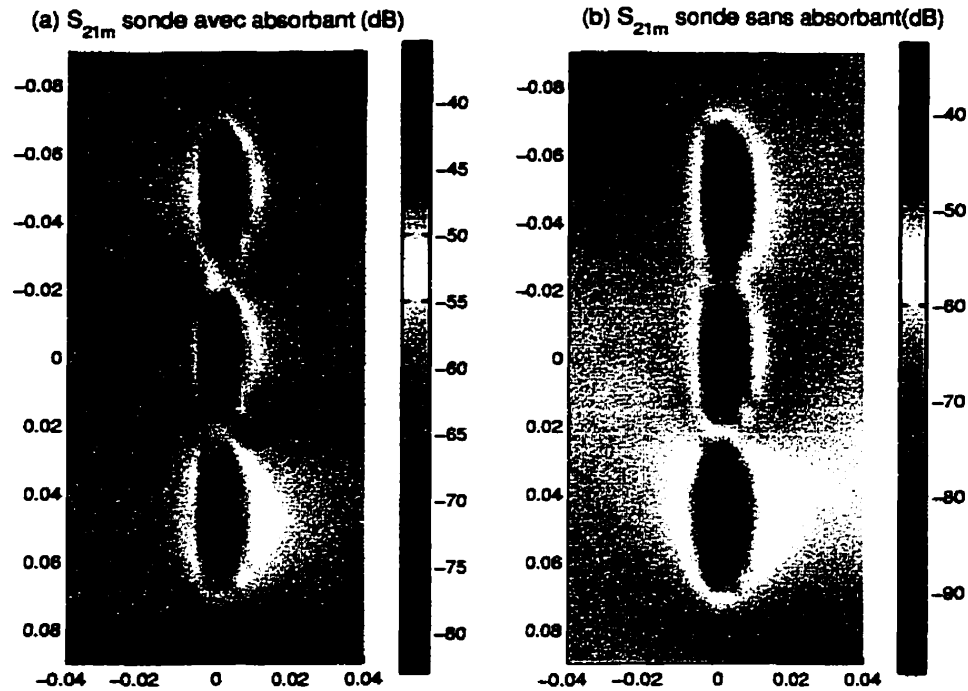
$$S_{11m} = S_{11} + \frac{\Gamma_s S_{21}^2}{1 - S_{22}\Gamma_s} \approx S_{11} + \Gamma_s S_{21}^2 \quad (5.8)$$

où  $S_{11}$  est un terme non-modulé et  $\Gamma_s S_{21}^2$  et le terme modulé par la sonde.

L'hypothèse qui permet d'expliquer que  $K$  varie consiste à postuler que la sonde perturbe plus fortement l'adaptation de l'antenne ( $S_{11m}$ ) que le paramètre  $S_{21m}$ . Ainsi, si les deux paramètres ne varient pas de la même manière pour différentes positions, le rapport des deux paramètres ne sera pas constant. Nous allons maintenant effectuer d'autres mesures pour expliquer ce phénomène.

Dans un premier temps, on peut réduire l'effet du câble coaxial d'alimentation du dipôle sur  $S_{21m}$  en effectuant une mesure avec une gaine absorbante autour du câble coaxial. Les Figures 5.3 (a) et 5.3(b) avec et sans gaine absorbante respectivement montrent que le câble coaxial vertical de la sonde perturbe peu les mesures de  $S_{21m}$ . En effet, on observe peu de différences entre les mesures en champ proche avec absorbant et sans absorbant. Il est difficile de quantifier les résultats montrés à la Figure 5.3 (les grandes différences apparaissent pour des valeurs très faibles), cependant, on peut quand même en déduire que le fil coaxial vertical métallique a peu d'influence sur les mesures de  $S_{21m}$ .

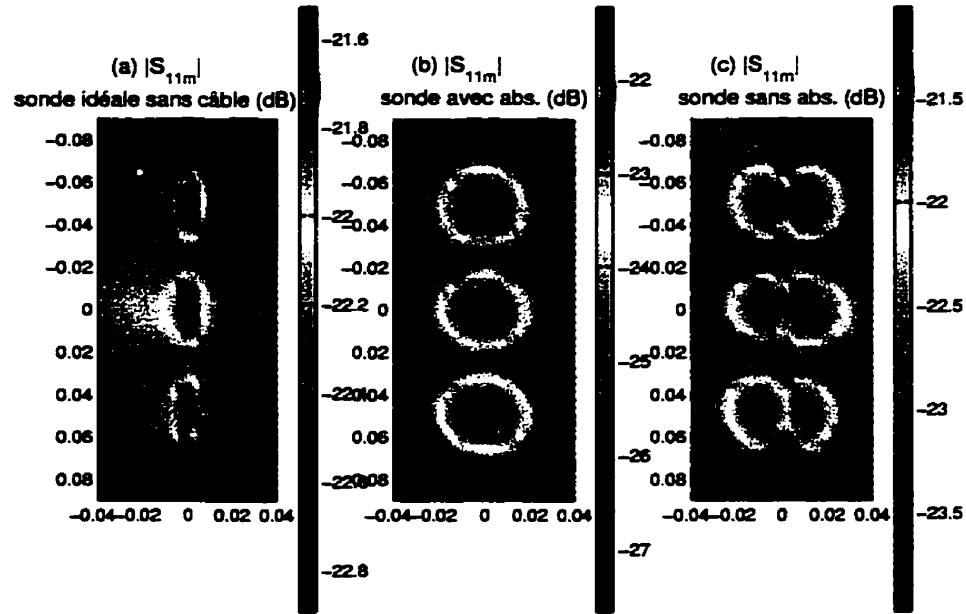
On peut refaire les même mesures que précédemment en relevant cette fois le paramètre  $S_{11m}$  (figure 5.4(b) 5.4(c)). On a ajouté une mesure supplémentaire de la



**Figure 5.3:**  $S_{21m}$  coefficient de transmission mesuré dans le cas (a) avec absorbant sur la gaine extérieure du fil coaxial et dans le cas (b) sans absorbant, pour différentes positions de la sonde au dessus de l'antenne sous test (antenne fente).

perturbation de l'antenne sous test en présence d'une sonde idéale sans câble (figure 5.4(a)). La sonde idéale sans câble est composée de deux monopôles et d'une résistance de  $100\Omega$  équivalente à l'impédance entre les deux câbles coaxiaux de  $50\Omega$  (voir Figure 5.5). La sonde est posée sur une mousse (*styro-foam*) rigide et transparente aux micro-ondes.

Les Figures 5.4(a) et 5.4(b) et même 5.4(c) montrent que la sonde a une influence sur les mesures de  $S_{11m}$ , étant donné que l'on observe une différence considérable entre ces figures. De plus amples explications à propos de ces figures sont données

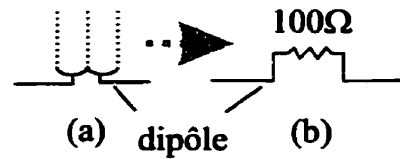


**Figure 5.4:**  $S_{11m}$  coefficient de réflexion mesuré pour différentes positions de la sonde au dessus de l'antenne sous test (antenne fente).

plus loin. La Figure 5.4(c) montre une saillie verticale séparant en deux la distribution des  $S_{11}$  mesurés.

Le schéma de la Figure 5.6 permet d'expliquer de façon intuitive ces résultats. Le signal émis par l'antenne atteint d'abord le dipôle  $E_{dip1}$  et le câble de la sonde  $E_{coax1}$ . Après induction de courant, des signaux sont réémis ( $E_{dip2}$  et  $E_{coax2}$ ) puis sont couplés à nouveau à l'antenne sous test. Une partie de ces signaux est à nouveau réfléchi vers la sonde, et ainsi de suite. L'approximation menant à l'équation 1.19 implique qu'en pratique, cette réflexion de deuxième ordre vers la sonde est négligée.  $E_{coax2}$  affecte la mesure de  $S_{11m}$  de l'antenne sous test, ce qui explique la grande différence entre les Figures 5.4(b) et 5.4(c). Cependant, à cause de la géométrie particulière de la

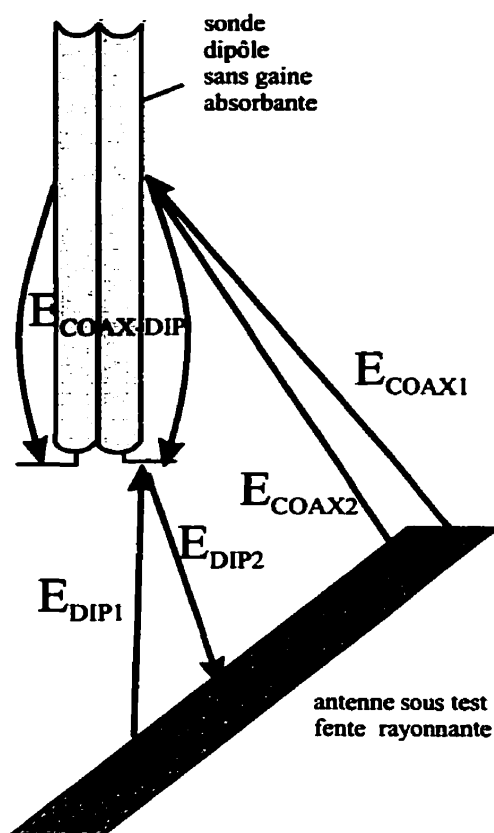




**Figure 5.5:** (a) sonde dipôle avec dipôle est remplacée par (b) un modèle équivalent (sonde idéale sans câble). Le câble est remplacé par une résistance de  $100\Omega$ . La sonde idéale est posée sur un bloc de mousse.

sonde, le paramètre  $S_{21m}$  n'est pas modifié de façon aussi importante par  $E_{coax2}$ . En effet, la réflexion de l'onde du signal ré-émis par le câble coaxial de la sonde vers les monopôles (voir Figure 5.6  $E_{coax-dip}$ ) se fait de manière égale sur chaque monopôle et dans le même sens (mode commun), car la sonde a une géométrie symétrique et le câble coaxial a un faible diamètre extérieur. De plus, le mode commun alors induit sur le dipôle est absorbé par le circuit hybride  $180^\circ$ . C'est pourquoi l'effet de la réflexion  $E_{coax-dip}$  lors de la lecture du paramètre  $S_{21m}$  n'est pas visible. Par contre, l'effet de  $E_{dip2}$  et  $E_{coax2}$  devient visible lors de la lecture de  $S_{11m}$ . La Figure 5.4(a) montre le paramètre  $S_{11m}$  obtenu en plaçant une sonde idéale sans câble. Cette figure montre l'effet du dipôle de la sonde sans l'effet de la gaine extérieure du fil coaxial vertical. Ce résultat est très différent des Figures (b) et (c). Cela permet de conclure que la gaine du câble coaxial extérieure a une influence sur les mesure de  $S_{11m}$ .

La sonde perturbe l'adaptation  $S_{11m}$  de l'antenne sous test comme cela est montré à la Figure 5.4. En effet, le signal  $E_{coax1}$  sur le fil coaxial retourne vers l'antenne et modifie l'adaptation  $S_{11m}$  de celle-ci. L'effet du câble se manifeste par une saillie le long de l'antenne à la Figure 5.4 (c). En effet, la géométrie de l'antenne fente utilisée



**Figure 5.6:** Analyse des ondes réfléchies entre l'antenne sous test et la sonde. Seules les ondes réfléchies de premier ordre sont représentées. On néglige les réflexions multiples d'ordre supérieur.

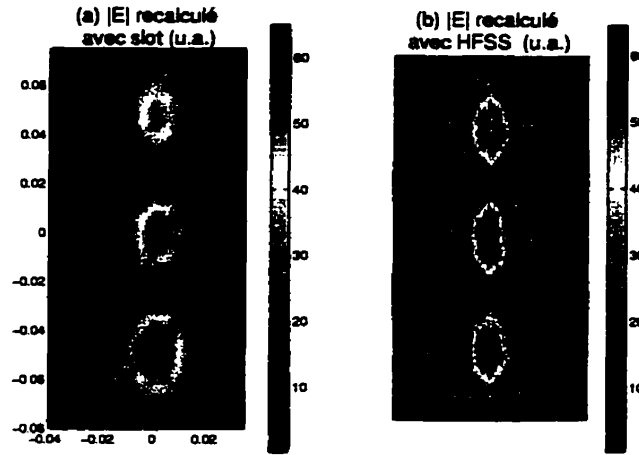
fait en sorte que le signal  $E_{coax1}$  doit être nul lorsque la sonde est placée exactement dans le plan vertical parallèle à l'axe de la fente. Le champ  $E_{coax1}$  vertical se couplant au câble est de polarité différente de part et d'autre de ce plan. Ce passage par zéro contribue à la saillie observée. Par contre, lorsqu'un matériau absorbant (élastomère chargé de particules de carbone) recouvre le câble coaxial, le signal réfléchi  $E_{coax2}$  est amoindri et il ne reste en principe que le signal  $E_{dip2}$ , lequel doit être maximum le long de l'axe de la fente. Ceci est bien le cas dans la Figure 5.4 (b). Les géométries

de la jonction sonde-câble (5.4b) et sonde-résistance (5.4a) sont différentes, ce qui expliquerait en partie la dissemblance entre les deux résultats.

### 5.2.3 Comparaison des champs proches reconstitués avec HFSS

Une dernière étude nous a permis de vérifier l'hypothèse selon laquelle le paramètre  $S_{21m}$  donne une mesure correcte et non perturbée de l'antenne sous test.

Tout d'abord, à partir de l'étude précédente, le programme *Slot* a été utilisé pour calculer les courants dans l'antenne sous test. Ensuite, on a déterminé le champ proche à partir des valeurs des courants. La même structure sans la présence de la sonde a été simulée à l'aide du logiciel commercial *HFSS* utilisant une méthode d'éléments finis. Les champs proches ont été calculés à une même distance soit  $5mm$  au dessus de la fente, les Figures 5.7 (a) et (b) montrent ces résultats. D'après ces figures, les champs proches reconstitués par les deux méthodes donnent des résultats relativement semblables. Cela confirme l'hypothèse selon laquelle les courants calculés correspondent avec la géométrie de la structure. Une étude avec une résolution plus élevée permettrait, de mettre plus en évidence les similitudes entre ces deux figures. En réalité il est difficile de représenter visuellement les similitudes entre les deux résultats obtenus avec les deux différents logiciels (*Matlab* Figure (a) et *HFSS* Figure(b)), car il semble que les codes de couleurs pour chaque intensité ne soient pas les mêmes d'un logiciel à l'autre.



**Figure 5.7:**  $|E|$  5mm au dessus de l'antenne sous test. (a) valeurs recalculées avec Slot. (b) valeurs recalculées avec HSFSS.

### 5.3 Conclusion

Les différentes sources d'erreur expérimentales ont été répertoriées. La connaissance de celles-ci est empirique et dépend du montage expérimental. La perturbation est une des principales sources d'erreur. Son influence a été analysée à la section 5.2. Le principe des mesures en champ proche repose sur l'hypothèse que la sonde ne perturbe pas l'antenne sous test. Les mesures effectuées ont montré que le coefficient de réflexion ( $S_{11m}$ ) de la structure rayonnante étudiée varie en fonction des différentes positions de la sonde. L'antenne sous test est faiblement perturbée par la présence de la sonde. Cependant, le coefficient de transmission ( $S_{21m}$ ) mesuré à la sonde n'est que légèrement affecté par l'antenne sous test, à cause de la géométrie particulière de la sonde. Cette étude permet de vérifier que l'hypothèse selon laquelle la sonde ne perturbe pas l'antenne sous test est valable dans le cadre de cette expérience.

## CHAPITRE 6

### TECHNIQUES DE RÉGULARISATION POUR PALLIER LES DIFFÉRENTES SOURCES D'ERREUR

Le Chapitre 5 a montré de manière empirique que les différentes sources d'erreur avaient un effet variable sur la qualité des résultats de courants sources et des mesures en champ lointain. À ces sources d'erreur s'ajoute le problème de conditionnement de matrice. Cependant, il est possible en rajoutant une information *a priori* sur la solution cherchée, d'ajuster la solution pour réduire l'effet de la perturbation. Ce chapitre tente de développer ce concept.

Dans un premier temps, on montre que l'équation intégrale définit un problème mal posé. Cela permet de développer une technique simple de régularisation. Dans un deuxième temps, on évalue ses propriétés sur des cas simulés. Enfin, trois exemples d'application sont donnés afin de vérifier sa validité dans un contexte réel.

#### 6.1 Problème inverse mal posé

Le concept de problème mal posé (*ill-posed problem*) a été largement étudié dans le passé. L'origine de ce concept est attribuée au mathématicien Jacques Hadamard (1865-1963) qui a étudié le problème au début du siècle. D'après Hadamard, un problème est dit mal posé si l'une des conditions suivantes est satisfaite : (a) la solution n'existe pas (b) il y a plusieurs solutions ou (c) la solution est instable

(la solution est très sensible à la moindre variation des données et ne dépend pas continûment de celles-ci).

L'équation intégrale (appelée aussi équation de Fredholm de première espèce) constitue un exemple classique retrouvé dans la littérature (par exemple, [5], [18], [26]). En reprenant l'équation intégrale à l'origine de la méthode des moments (équation 1.1), on obtient :

$$\int_a^b I(z')K(z, z')dz' = -E^i(z), \quad c \leq z \leq d \quad (6.1)$$

où le membre de droite  $-E^i$  et le noyau  $K$  sont donnés et où  $I(z')$  est une inconnue. Si la solution  $I(z')$  est perturbée par :

$$\Delta I(z') = \epsilon \sin(2\pi p z'), \quad p = 1, 2, \dots \quad \epsilon = \text{constante} \quad (6.2)$$

alors la perturbation du membre de droite est donnée par :

$$\Delta E^i(z) = \epsilon \int_a^b K(z, z') \sin(2\pi p z') dz' \quad (6.3)$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue [4] permet de montrer que si l'intégrale est bornée quel que soit  $z$ , alors  $\Delta E^i(z) \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow \infty$ . Donc  $\|\Delta I(z')\|/\|\Delta E^i(z)\|$  peut

devenir arbitrairement large en choisissant un entier  $p$  suffisamment grand. Cela montre que l'équation 6.1 définit un problème mal posé car la condition ci-dessus est satisfaite. Les systèmes discrets ont des propriétés très semblables. Dans le contexte de la méthode des courants équivalents, le système discret équivalent à résoudre peut s'écrire de la façon suivante :

$$\hat{I} = \arg \min_I \| [Z][I] - [V_{prb}] \|^2 \quad (6.4)$$

En d'autres termes,  $\arg \min_I$  est une *fonction* qui retourne la solution qui minimise la norme  $\| [Z][I] - [V_{prb}] \|^2$ .

Les techniques de régularisation sont utilisées pour obtenir des solutions stables à partir de systèmes sensibles aux perturbations dont un exemple vient d'être donné. Comme nous allons le voir plus loin, nous avons choisi, dans le cadre de ce travail, de travailler avec la méthode de régularisation de Tikhonov qui est une méthode facile à mettre en oeuvre tout en donnant de bons résultats. Les problèmes inverses en électromagnétisme ont été l'objet d'une série spéciale dans la revue *Transaction on Antennas and Propagations* en 1981. Quelques articles théoriques (par exemple [15], [21]) ont développé une formulation pour traiter les problèmes de régularisation dans le domaine des antennes. Cependant, aucun développement de méthode de régularisation pour l'application des mesures en champ proche avec des applications à l'appui n'a été effectué. Aujourd'hui, la puissance de calcul des ordinateurs permet de

manipuler des systèmes matriciels beaucoup plus importants et ce sans trop d'efforts de mise en oeuvre, ce qui permet de traiter des structures plus complexes et des mesures en champ proche avec une meilleure définition.

Dans un premier temps, la section suivante présente la méthode d'inversion de la matrice  $[Z]$  utilisée dans le programme *Slot* (décomposition par SVD). Celle-ci sera comparée à la méthode de régularisation de Tikhonov, et on montrera l'effet des différentes techniques sur la qualité de la solution.

## 6.2 Technique des moindres carrés (*SVD*) et *surdimensionnement*

Les principes de la décomposition en valeurs singulières ont été présentés dans la section 1.4.5. Il a été montré qu'il est possible de *surdimensionner* le système à résoudre pour essayer de *moyenner* <sup>1</sup> les inconnues. Le choix du rapport de *surdimensionnement* <sup>2</sup> a toujours été plus ou moins empirique et aucune démonstration n'a jamais été établie sur ce sujet.

Dans cette section, on a étudié l'influence du surdimensionnement sur cette méthode d'inversion de matrice. Pour ce faire, une simulation a été effectuée à partir de courants sources connus. On a ajouté un bruit variable sur une prise de mesure simulée à partir de ces sources de courant  $I_{reel}$ . À partir de ces mesures bruitées, on a déterminé les courants sources. Les étapes de calcul sont les suivantes :

---

<sup>1</sup>choisir une valeur optimale des inconnues qui minimise le résidu.

<sup>2</sup>le rapport entre le nombre d'équations et le nombre d'inconnues dans le système linéaire à résoudre

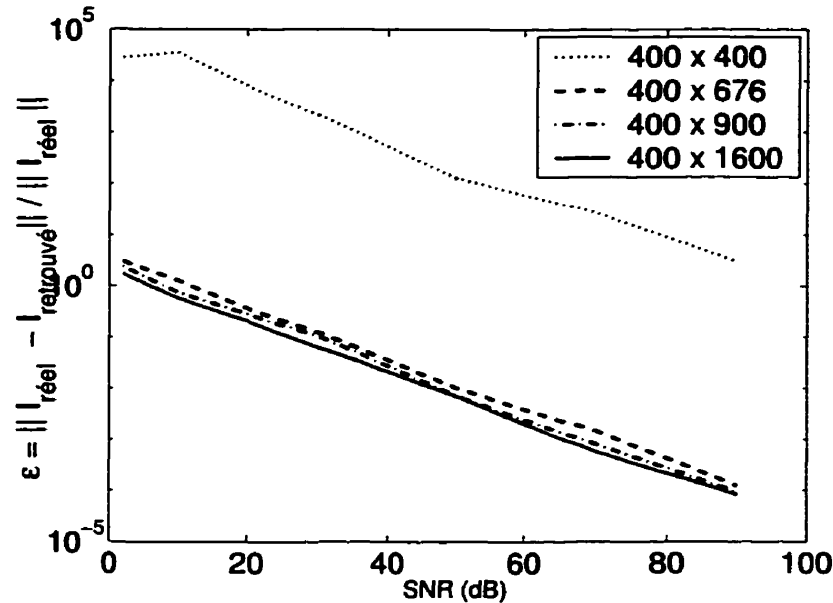


- simuler une prise de mesure :  $V_{prb \text{ simule}} = Z I_{reel}$
- ajouter un bruit blanc :  $V_{bruit} = V_{prb \text{ simule}} + b$
- décomposer  $Z$  en valeurs singulières avec SVD :  $U_{svd} S_{svd} V_{svd}^T = Z$
- retrouver les courants :  $I_{retrouve} = U_{svd} S_{svd}^{-1} V_{svd}^T V_{bruit}$
- comparer les courants retrouvés avec les courants réels :

$$\varepsilon = \|I_{reel} - I_{retrouve}\| / \|I_{reel}\|$$

où  $(U_{svd} S_{svd} V_{svd})$  fait référence à la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) déjà définie plus tôt.  $V_{svd}^T$  représente la matrice conjuguée transposée de  $V_{svd}$ . Notons que nous avons ici abandonné la notation matricielle utilisant des crochets  $[ ]$  pour des raisons de lisibilité. Mais, évidemment, toutes les variables mentionnées dans cette section sont des vecteurs ou des matrices dont les dimensions sont soit données dans le texte soit mentionnées dans la section 1.3.1.

On effectue ce calcul pour différents niveaux de bruits et différents rapports de *surdimensionnement* et on obtient les résultats présentés à la Figure 6.1. La Figure 6.1 montre que cette méthode est très sensible à la fois au rapport de *surdimensionnement* et au niveau de bruit. La différence est très grande entre un système carré (*non-surdimensionné*,  $400 \times 400$ ) et les systèmes *surdimensionnés*. On peut en conclure qu'il suffit de rajouter quelques échantillons (points de mesure) pour obtenir un résultat acceptable. Ouardirhi et Laurin [16] avaient observé une règle selon laquelle le rapport de surdimensionnement optimal dans les systèmes étudiés est de l'ordre de 3 (un système linéaire dans lequel il y a 3 fois plus de points de mesure



**Figure 6.1:** Erreur sur les courants pour différents niveaux de bruit et différents rapports de *surdimensionnement*.

que d'inconnues à déterminer). Cette fois, grâce à cet exemple, on se rend compte qu'il est surtout important de rajouter quelques points de mesure pour surdimensionner le système et que le rapport de 3 n'est pas une règle empirique valable dans ce contexte. On note aussi la dépendance prévisible de l'erreur  $\varepsilon$  vis-à-vis du bruit. Cela permet de conclure que ce système est sensible aux erreurs expérimentales. Si on postule que les différents types d'erreurs (par exemple, l'erreur sur la distance ou l'erreur sur l'orientation de la sonde) peuvent être associés à un bruit blanc (il faut malheureusement accepter cela sans preuve), on peut alors conclure que la technique d'inversion SVD avec *surdimensionnement* n'est pas capable de *corriger* ces différentes sources d'erreur expérimentales. Les sections suivantes montrent qu'il est possible, dans une certaine mesure, de les corriger avec d'autres techniques.

### 6.3 Technique de régularisation avec pénalité pour un système simple quadratique linéaire

Une manière intuitive de voir comment un problème mal posé donne lieu à des résultats faux consiste à dire que le système  $Z$  décomposé en un produit de matrices  $(U_{svd} S_{svd} V_{svd})$  est sous-déterminé à cause d'un ensemble de valeurs singulières nulles (numériquement : des valeurs très petites). Il devient alors nécessaire d'apporter des informations supplémentaires à propos de la solution désirée  $I$  dans l'espoir de stabiliser le système et de pouvoir en tirer une solution correcte. C'est l'objectif des techniques de *régularisation*.

Bien qu'il existe, en principe, plusieurs techniques pour ajouter de l'information sur la solution  $I$ , une approche très courante consiste à contraindre la norme de la solution  $\|I\|$  à de petites valeurs. Cela implique des valeurs *régulières*, d'où le nom de la méthode. La technique de *régularisation de Tikhonov* est une application très courante de ce principe. L'idée est de définir une solution  $I_{\lambda min}$  qui minimise la combinaison pondérée entre le résidu de la solution et la norme minimale sur la contrainte :

$$\begin{aligned} I_{\lambda min} &= \arg \min_I \{ \|Z I - V_{prb}\|^2 + \lambda \|I\|^2 \} \\ &= \arg \min_I \{ \|Z I - V_{prb}\|^2 + \lambda I^T M I \} \end{aligned} \quad (6.5)$$

où  $I_{\lambda min}$  est une solution du système régularisé,  $M$  est la matrice identité, et  $\lambda$ ,

un paramètre scalaire de régularisation qui contrôle le poids de la contrainte de régularisation par rapport au résidu. Le premier terme de droite est appelé *résidu* (de la méthode des moindres carrés). Le second est appelé terme de *pénalité* ou terme de *régularisation*. Évidemment, un  $\lambda$  grand favorise une petite norme de la solution (beaucoup de filtrage), et, inversement, un  $\lambda$  petit favorise un petit résidu (peu de filtrage).

En théorie, l'emploi de la technique de *régularisation de Tikhonov* ne peut se faire que si on fait l'hypothèse que les erreurs sur les mesures en champ proche ne sont pas biaisées. Or, cette condition est difficile à vérifier en pratique et il faut se contenter de simplifier l'étude des sources d'erreur en acceptant cette hypothèse.

Il est possible de choisir un paramètre de régularisation (appelé  $\lambda_{min}$ ) qui minimise l'erreur sur les courants sources :

$$\varepsilon = \frac{\|I_{reel} - I_{\lambda_{min}}\|}{\|I_{reel}\|} \quad (6.6)$$

Toutefois, dans la pratique, on ne connaît ni les sources réelles  $I_{reel}$ , ni l'erreur  $\varepsilon$  sur celles-ci et donc il est impossible dans ces conditions de déterminer  $\lambda_{min}$ . Il existe cependant des techniques relativement robustes qui permettent d'estimer  $\varepsilon$  pour différentes valeurs de  $\lambda$ . C'est l'objet de la prochaine section.

#### 6.4 *Generalized Cross Validation*, estimateur robuste de l'erreur sur les sources de courant

L'idée de la GCV (*Generalized Cross Validation*) est attribuée à Golub et Wahba dans les années 1979 [3]. La théorie qui sous tend cette méthode est la suivante : si on élimine un point de mesure  $V_{prb\ i}$ , alors la solution régularisée devrait prédire ce changement. La fonction GCV est définie comme suit :

$$G(\lambda) \equiv \frac{\| Z I_\lambda - V_{prb} \|^2}{\{tr(M - A(\lambda))\}^2} \quad (6.7)$$

où  $\lambda$  est le paramètre de régularisation tel que défini dans la section précédente et  $M$ , la matrice identité. Dans le cadre de la méthode de Tikhonov  $A(\lambda)$  est donnée par :

$$A(\lambda) = Z (Z^T Z + \lambda M)^{-1} Z^T \quad (6.8)$$

Il a été montré expérimentalement que cette technique estime de façon relativement fidèle l'erreur réelle sur les sources. Elle est surtout utilisée pour choisir le paramètre de régularisation. En effet, si, dans un cas simulé où on connaît la solution ainsi que l'erreur réelle, on trace l'erreur réelle pour différentes valeurs de  $\lambda$  ainsi que la fonction GCV pour les mêmes valeurs de  $\lambda$  et que l'on observe que les minima

de chacune des "fonctions" sont approximativement égaux alors on peut utiliser la fonction GCV pour estimer  $\lambda_{min}$  dans une application réelle où la solution et l'erreur réelle sont inconnues. En d'autres termes, dans une application concrète, l'erreur réelle n'est pas connue et on utilise la fonction GCV pour estimer le  $\lambda$  qui minimise l'erreur réelle. Bien sûr, Cela ne peut se faire qu'en émettant l'hypothèse que les conditions expérimentales (dans lesquelles les simulations et validations de la fonction GCV ont été effectuées) peuvent être étendues aux conditions de l'application réelle.

Une étude de cas, objet de la prochaine section, a été effectuée pour s'assurer de la validité de l'estimateur.

### 6.5 Étude de la régularisation avec GCV comme estimateur de $\lambda$ en fonction du *surdimensionnement*

Nous procédons ici d'une manière analogue à celle décrite à la section 6.2. On montrera, ici, que la technique de régularisation est capable de compenser certains types d'erreur. Rappelons à nouveau qu'il est nécessaire de travailler dans un environnement idéal dans lequel on a éliminé toutes les sources d'erreur réelles. On contrôle le niveau d'erreur en ajoutant un bruit blanc dans la mesure des tensions.

Les étapes de notre étude de cas sont les suivantes :

- simuler une prise de mesure :  $V_{prb\ simule} = Z I_{reel}$ ,
- ajouter un bruit blanc :  $V_{bruit} = V_{prb\ simule} + b$ ,

**Tableau 6.1:** Valeurs de (a) $\lambda_{min\ GCV}$  et (b) $\lambda_{min\ \varepsilon}$  pour différents bruits et différentes valeurs de surdimensionnement. Le nombre de coefficients sources inconnus est de 400.

		SNR (dB)						
nb mesures		2	10	20	30	50	70	90
(a) $\lambda_{min\ GCV}$	400	5E-01	3E-01	1E-01	3E-02	6E-04	9E-05	8E-06
	676	5E-01	3E-01	1E-01	3E-02	6E-04	8E-05	2E-05
	900	6E-01	3E-01	8E-02	3E-02	5E-04	8E-05	4E-05
	1600	6E-01	3E-01	1E-01	2E-02	5E-04	8E-05	5E-05
		SNR (dB)						
nb mesures		2	10	20	30	50	70	90
(b) $\lambda_{min\ \varepsilon}$	400	7E-01	3E-01	9E-02	1E-02	7E-04	7E-05	9E-06
	676	7E-01	3E-01	8E-02	1E-02	5E-04	1E-04	2E-05
	900	7E-01	3E-01	8E-02	1E-02	5E-04	1E-04	4E-05
	1600	7E-01	3E-01	7E-02	8E-03	6E-04	1E-04	5E-05

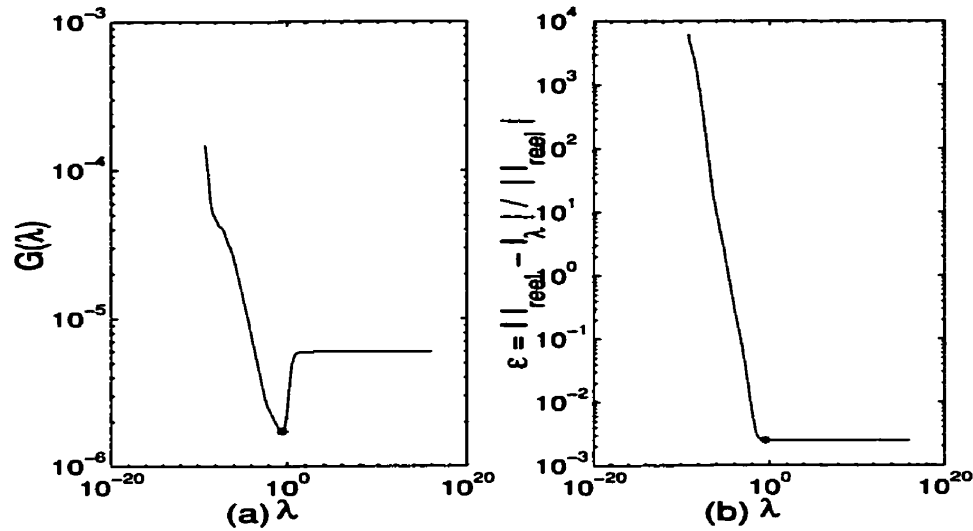
- calculer la fonction GCV pour les différentes valeurs de  $\lambda$ ,
- déterminer  $\lambda_{min\ GCV}$  qui minimise la fonction GCV,
- déterminer  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  qui minimise l'erreur réelle,
- retrouver les courants par la méthode de régularisation de Tikhonov :  $I_{\lambda_{min\ GCV}} = \arg \min_I \{ \|Z I - V_{prb}\|^2 + \lambda \|I\|^2 \},$
- comparer  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  et  $\lambda_{min\ GCV}$  (Tableau 6.1),
- comparer les courants retrouvés avec les courants réels avec  $\lambda_{min\ GCV}$  (figure 6.3) :  $\varepsilon = \|I_{reel} - I_{\lambda_{min\ GCV}}\| / \|I_{reel}\|,$
- comparer les courants retrouvés avec les courants réels avec  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  (figure 6.5) :  $\varepsilon = \|I_{reel} - I_{\lambda_{min\ \varepsilon}}\| / \|I_{reel}\|.$

Le Tableau 6.1 donne les différentes valeurs de  $\lambda_{min}$  pour différents rapports de surdimensionnement et différentes sources de bruit. Les valeurs du tableau sont moyennées sur quatre essais. Nous nous sommes contentés de quatre essais car peu de changements ont été observés d'un essai à l'autre, aussi ces valeurs sont données simplement pour montrer la correspondance entre  $\lambda_{min\ GCV}$  et  $\lambda_{min\ \varepsilon}$ . On observe que les valeurs de  $\lambda_{min\ GCV}$  du Tableau (a) sont très proches des valeurs  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  du Tableau (b). Nous pouvons conclure que dans ce contexte, la fonction  $GCV$  permet d'estimer le paramètre de régularisation  $\lambda$ . En supposant maintenant que  $\lambda_{min\ GCV}$  est un bon estimateur de  $\lambda_{min\ \varepsilon}$ , nous allons étudier le comportement de l'erreur sur les courants après régularisation (avec  $\lambda_{min\ GCV}$ ) en fonction de différentes sources de bruit et rapports de surdimensionnement.

À titre d'exemple, la Figure 6.2 permet de comparer l'allure de la courbe de l'erreur réelle  $\varepsilon$  (b) avec la courbe de la fonction  $GCV\ G(\lambda)$  (a) en fonction de  $\lambda$ . Il est difficile de tirer des conclusions sur ces courbes, notons cependant que les deux minima  $\lambda_{min}$  de chacune des deux fonctions sont proches l'un de l'autre.

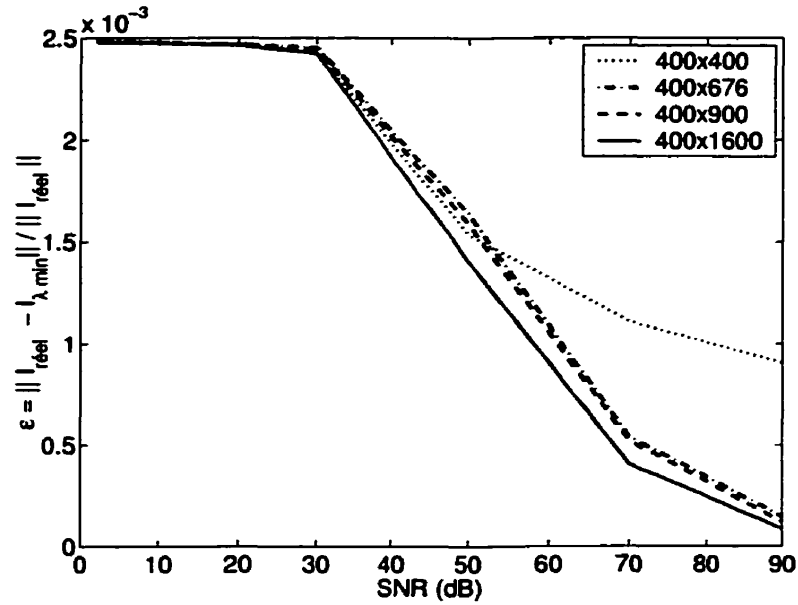
La Figure 6.3 montre l'erreur relative réelle en utilisant  $\lambda_{min\ GCV}$  comme paramètre de régularisation en fonction du bruit (SNR).  $400 \times 676$  signifie 400 inconnues et 676 points de mesure. Les courants sont tirés d'une étude réelle d'une antenne *patch* étudiée dans [12]. Encore une fois, pour être plus rigoureux, les valeurs des erreurs relatives auraient dues être moyennées sur de nombreux essais, mais plusieurs simulations effectuées ont montré qu'il y avait peu de différences d'un essai à l'autre.





**Figure 6.2:** (a) Exemple de courbe représentant la fonction GCV (bruit blanc de  $SNR=10dB$  et un surdimensionnement de  $400 \times 676$ ) pour différentes valeurs de  $\lambda$ , le paramètre de régularisation, ici  $\lambda_{min\ GCV} = 0,31$ . (b) Courbe de l'erreur réelle pour différentes valeurs de  $\lambda$ , ici  $\lambda_{min\ \epsilon} = 0,34$ .

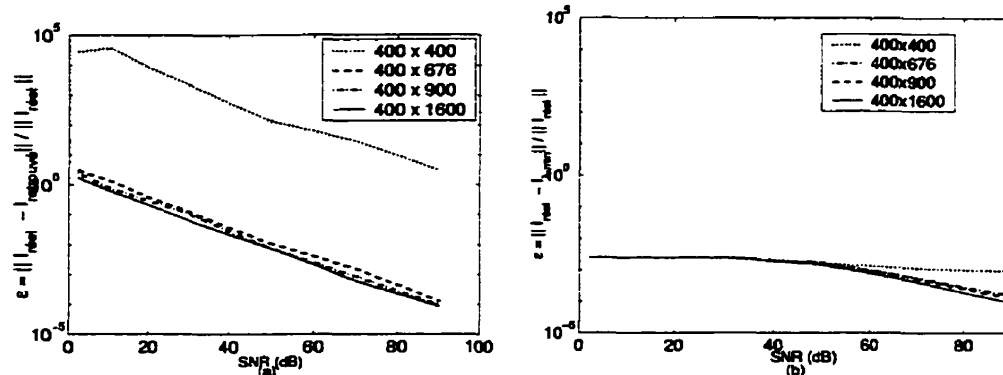
En comparant la Figure 6.1 avec la Figure 6.3, la Figure 6.4 montre que la technique de régularisation est moins sensible au bruit que la méthode par simple inversion SVD de la matrice. Toutes choses étant égales par ailleurs, on observe que l'utilisation de la méthode de régularisation de Tikhonov avec l'estimateur GCV donne une erreur relative plus basse que la simple inversion avec SVD et surdimensionnement. Au delà d'un certain seuil de bruit ( $SNR < 30dB$ ), l'erreur  $\epsilon$  est constante quel que soit le surdimensionnement. En effet, le bruit étant très important, le paramètre de régularisation  $\lambda$  sera élevé et ainsi la contrainte de régularisation aura plus de poids par rapport à la minimisation du résidu et l'erreur relative sera relativement constante sur cette plage de bruit ( $10dB < SNR < 30dB$ ). Pour un bruit faible



**Figure 6.3:** Erreur sur les courants pour différents niveaux de bruit et différents rapports de *surdimensionnement* après régularisation avec  $\lambda_{\min} \text{ GCV}$ .

( $SNR > 30dB$ ), le problème est alors mal posé et la technique de régularisation ne fait que filtrer les effets de mauvais conditionnement avec un paramètre de régularisation  $\lambda$  très faible ce qui réduit presque notre technique de régularisation à la méthode SVD. Dans ces conditions de faible bruit, le rajout de quelques échantillons supplémentaires permet de diminuer l'erreur relative de manière substantielle (d'un facteur de 8 dans cet exemple).

Ces observations sont résumées dans le Tableau 6.2 (bien sûr les termes *élevés/faibles* employés dans le tableau sont relatifs, et le terme *variable* signifie que  $\varepsilon$  varie beaucoup en fonction du bruit).

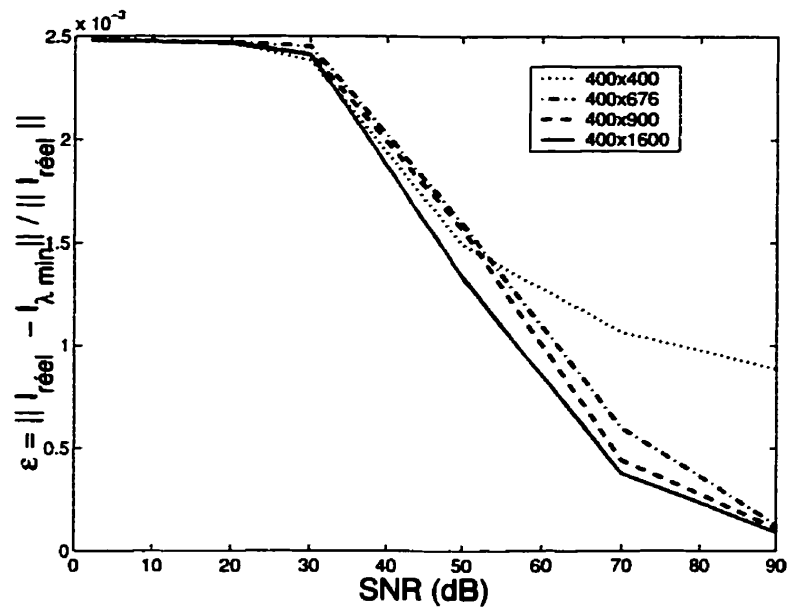


**Figure 6.4:** Comparaison entre la technique d'inversion SVD (a) et la technique de régularisation utilisant  $\lambda_{min\ GCV}$  (b) montrées sur une même échelle.

**Tableau 6.2:** Comparaison entre les niveaux d'erreur relative  $\varepsilon$  sur la solution  $I$  entre les 2 méthodes.

	SVD ∀ bruit	Tikhonov bruit élevé ( $SNR < 30dB$ )	Tikhonov faible bruit ( $SNR > 30dB$ )
système carré	$\varepsilon$ élevée et variable	$\varepsilon$ faible et variable	$\varepsilon$ moyenne et constante
surdimensionnement	$\varepsilon$ moyenne et variable	$\varepsilon$ faible et variable	$\varepsilon$ moyenne et constante

Afin de compléter notre étude, nous allons maintenant nous assurer que la fonction GCV permet d'estimer correctement  $\lambda_{min\ \varepsilon}$ . L'estimateur GCV permet de choisir le  $\lambda_{min}$  dans un cas pratique où on ne connaît pas l'erreur réelle. Dans le cas présent, où il s'agit d'un environnement de simulation, l'erreur réelle est connue. Cette information peut servir à vérifier la validité de la courbe de la Figure 6.3. En effet, si l'estimateur GCV est approprié,  $\lambda_{min\ GCV}$  ne devrait pas très différent de  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  qui minimise l'erreur réelle. De plus, l'erreur sur les courants ne devrait pas varier beaucoup. C'est ce que nous allons montrer en comparant les figures précédentes



**Figure 6.5:** Erreur sur les courants pour différents niveaux de bruit et différents rapports de *surdimensionnement* après régularisation avec  $\lambda_{min \varepsilon}$ .

avec la Figure 6.5 qui donne l'erreur sur les courants en utilisant cette fois  $\lambda_{min \varepsilon}$ . Rappelons qu'un seul essai a été effectué, il faut donc accepter de petites fluctuations statistiques entre les différentes valeurs. Encore une fois, pour être rigoureux, il faudrait moyenner les valeurs sur plusieurs essais. En tenant compte de ces fluctuations, on peut dire que cette figure est semblable à la Figure 6.3 et on peut en conclure que, dans le cadre de cette étude, la fonction GCV est un estimateur robuste de l'erreur sur les courants.

## 6.6 Étude de la régularisation avec GCV comme estimateur de $\lambda$ en fonction de l'erreur sur la distance de mesure

Tel que mentionné dans le Chapitre 5, il existe plusieurs sources d'erreur qui proviennent des différents paramètres d'ajustement du système de mesure (tel que la distance du plan de mesure, la coplanarité du circuit avec le plan de mesure, etc.). Cette étude a pour objectif de montrer que la technique de régularisation permet, dans une certaine mesure de corriger les erreurs de ce type. La procédure de test donnée ci-après est similaire à celle de la section 6.2. Cependant, la source d'erreur est maintenant une erreur  $\Delta d$  introduite sur la distance  $d$  entre le plan de mesure et l'antenne sous test. Nous avons choisi cette source d'erreur d'une part, parce qu'elle constitue à notre avis une des principales sources d'erreur (voir section 5.1.1) et d'autre part, parce que les simulations sont faciles à mettre en oeuvre. Les étapes de cette étude sont les suivantes :

- simuler une prise de mesure à une certaine distance erronée  $d + \Delta d$  :

$$V_{d+\Delta d} = Z_{d+\Delta d} I_{reel}$$

- calculer la fonction GCV pour un ensemble de  $\lambda$
- déterminer  $\lambda_{min}$  qui minimise la fonction GCV
- retrouver les courants par la méthode de régularisation de Tikhonov :

$$I_{\lambda min} = \arg \min_I \{ \|Z_d I - V_{prb}\|^2 + \lambda \|I\|^2 \}$$

- comparer les courants retrouvés avec les courants réels :

$$\varepsilon = \|I_{reel} - I_{\lambda \min}\| / \|I_{reel}\|$$

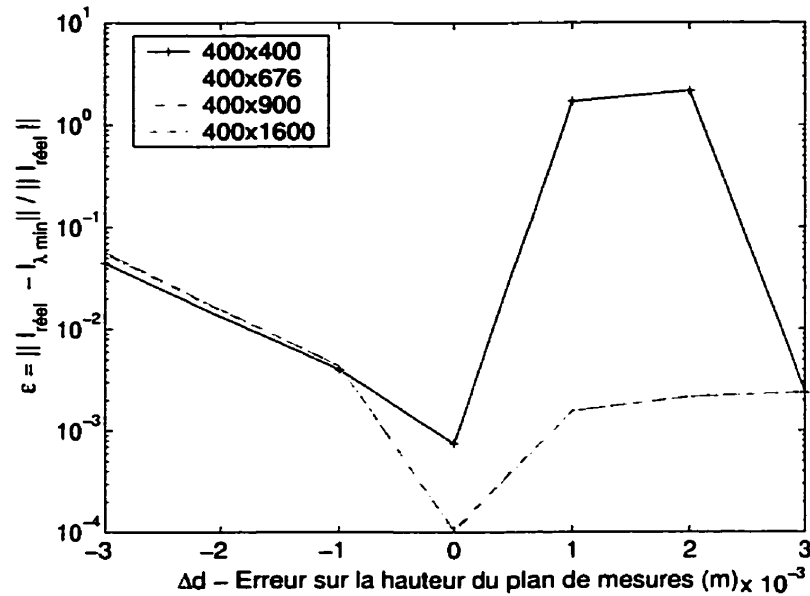
où  $Z_{d+\Delta d}$  est la matrice d'impédance calculée à la distance  $d+\Delta d$  et  $Z_d$  est la matrice d'impédance calculée à la distance  $d$ .

**Tableau 6.3:** Valeurs de (a)  $\lambda_{min \text{ GCV}}$  et (b)  $\lambda_{min \varepsilon}$  pour différents bruits et différentes valeurs de surdimensionnements. Le nombre de coefficients sources inconnus est de 400.

		$\Delta_d$ (mm)					
		-3	-1	0	1	2	3
(a) $\lambda_{min \text{ GCV}}$	nb mesures						
	400	3E-04	1E-04	1E-06	4E-09	1E-09	6E-04
	676	2E-04	1E-04	1E-04	2E-04	6E-04	6E-04
	900	2E-04	2E-04	2E-04	2E-04	5E-04	5E-04
	1600	2E-04	2E-04	2E-04	2E-04	4E-04	4E-04
		$\Delta_d$ (mm)					
		-3	-1	0	1	2	3
(b) $\lambda_{min \varepsilon}$	nb mesures						
	400	2E-01	2E-03	1E-06	7E-05	2E-04	1E-04
	676	3E-01	2E-03	1E-04	1E-04	1E-04	4E-04
	900	3E-01	3E-03	2E-04	2E-04	2E-04	6E-04
	1600	4E-01	3E-03	2E-04	2E-04	4E-04	1E-03

La présentation du Tableau 6.3 est similaire à celle du Tableau 6.1, la source de bruit SNR est maintenant remplacée par une erreur  $\Delta_d$  sur la distance du plan de mesure. Les courants sont tirés d'une étude réelle d'une antenne *patch* étudiée dans [12]. La hauteur réelle  $d$  (sans erreur de distance) du plan de mesures est de 5mm. Les valeurs de  $\Delta_d$  négatives signifient un rapprochement de la surface de courants, et inversement les valeurs positives représentent un éloignement. Lorsque l'erreur sur la distance du plan de mesure est petite (entre -1 et +2 mm) la fonction GCV avec surdimensionnement semble estimer correctement le paramètre de régularisa-

tion qui minimise l'erreur réelle  $\lambda_{min\ GCV} \sim \lambda_{min\ \varepsilon}$ . Par contre, si l'erreur sur la distance devient importante, notamment lorsqu'on se rapproche de l'antenne sous test ( $\Delta_d = -3mm$ ), alors la fonction GCV donne une valeur du paramètre de régularisation qui est trop petite. C'est la limite à laquelle la fonction GCV permet de prédire de manière précise  $\lambda_{min\ \varepsilon}$ . Enfin, il suffit de comparer la ligne représentant un surdimensionnement de  $400 \times 400$  et la ligne  $400 \times 676$  pour constater que le rajout de points de mesure permet d'améliorer de manière notable l'estimation de  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  à l'aide de la fonction GCV (cela se visualise mieux sur la Figure 6.6).



**Figure 6.6:** Erreur sur les courants pour différentes hauteurs de la sonde et différents rapports de *surdimensionnement* après régularisation avec  $\lambda_{min}$ . Une erreur  $\Delta d$  est introduite : les mesures sont effectuées à une hauteur de  $5mm + \Delta d$ . Les courbes de surdimensionnement  $400 \times 676$ ,  $400 \times 900$ ,  $400 \times 1600$  sont superposées donc indistinguables.

Aussi nous pouvons étudier l'effet du choix  $\lambda_{min\ GCV}$  comme estimateur de  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  sur la détermination des courants sources. À cette fin, la Figure 6.6 indique l'erreur des courants  $\varepsilon$  après régularisation en fonction de l'erreur de distance du plan de mesure. Ainsi, lorsque l'erreur sur la distance est faible ( $5mm \pm 1mm$  soit 20% d'erreur), la technique de régularisation permet de retrouver une solution dont l'erreur est acceptable. En effet, on observe qu'une erreur de  $\pm 1mm$  génère à peu près la même erreur sur les courants qu'un bruit blanc de  $-30dB$ . Il faut toutefois prendre cette observation avec beaucoup de réserve dans la mesure où l'erreur de distance n'est pas comparable à un bruit blanc. Notons enfin que cette figure est cohérente avec les résultats du Tableau 6.3, dans la mesure où l'écart entre le paramètre de régularisation estimé  $\lambda_{min\ GCV}$  et le paramètre  $\lambda_{min\ \varepsilon}$  augmente lorsque l'erreur sur la distance du plan de mesure augmente aussi.

## 6.7 Applications de la méthode de régularisation de Tikhonov

Dans un cas réel, il est évident que les sources de courant sont inconnues. Il devient donc impossible de quantifier l'erreur sur les courants. On sait cependant que la solution doit être relativement lisse et sans changement brusque du moins dans la direction des courants (cela suppose la connaissance de l'orientation des courants). Aussi, on peut détecter visuellement la qualité de la solution des courants sources. En effet, on s'attend à ce que la solution soit cohérente avec les mesures en champ proche.



Le premier exemple de notre étude de cas est une antenne déjà traitée dans la section 4.2. Le second est l'étude d'une ligne de transmission [13] avec un coude.

### **6.7.1 Application de la méthode de régularisation sur le calcul des courants dans une antenne fente alimentée par ligne coplanaire**

#### **6.7.1.1 Paramètres expérimentaux**

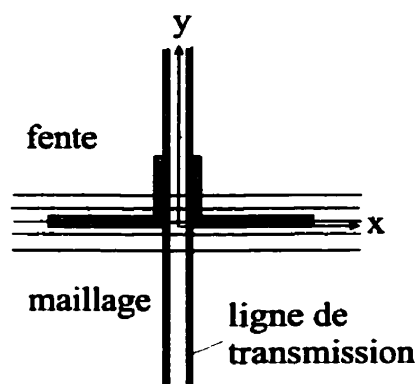
Cette structure a été étudiée dans la section 4.2. Tous les paramètres expérimentaux de cette section sont identiques à ceux de la section 4.2. Les mesures en champ proche montrées à la Figure 4.9 sont prises à une distance de  $2mm$  de l'antenne sous test selon deux orientations ( $\phi = 90^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$ ). Le balayage de la sonde a été effectué sur une grille de  $30 \times 30$  et couvre une surface de  $0,8\lambda \times 0,8\lambda$  ( $10cm \times 10cm$ ), pour un total 900 points de mesure pour chacune des orientations.

#### **6.7.1.2 Définition du maillage des courants**

Les courants magnétiques étaient distribués sur une grille rectangulaire. La solution montrée à la Figure 4.10 semblait cohérente. On observait cependant de brusques transitions dans les distributions de courants, signe d'un problème de conditionnement de matrice. De plus, en augmentant la définition et le nombre de segments définissant la grille de courants, les problèmes de conditionnement devenaient plus importants.

Cette technique de régularisation ne fonctionne pas de manière optimale pour un

système en deux dimensions où les courants sources sont orientés dans deux directions perpendiculaires. Il s'agit là d'une limite de cette méthode qui sera contournée plus loin à la section 6.8. Pour simplifier ce problème, les dipôles sont définis le long des fentes (voir Figure 6.7), puis les coefficients sont déterminés et enfin la technique de régularisation est appliquée. Il y a 91 coefficients de dipôles à déterminer et 900 points de mesure pour chaque orientation.

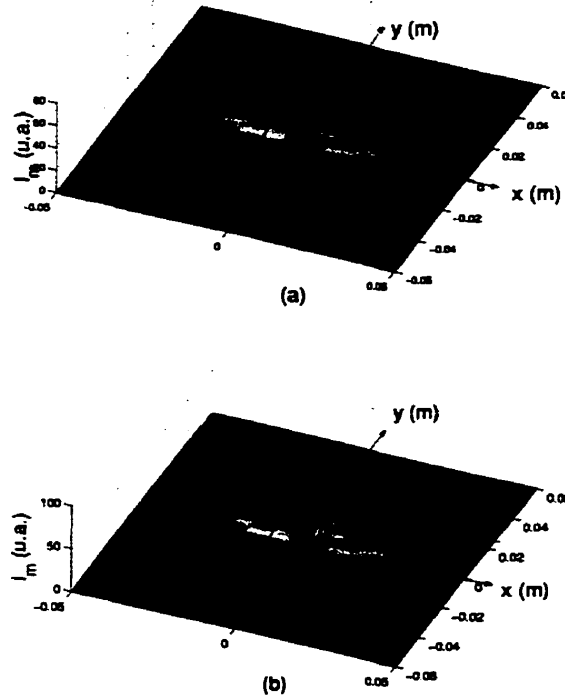


**Figure 6.7:** Schéma du maillage disposé sur l'antenne. Les dipôles qui longent la ligne de transmission sont confondus avec celle-ci.

### 6.7.1.3 Courants magnétiques équivalents avec la technique de régularisation

Dans cette étude, nous avons effectué les mesures avec deux orientations de sonde, mais comme nous le verrons plus loin, dans certains cas cela n'est plus nécessaire avec la technique de régularisation. La régularisation donne une distribution de courants plus douce (figure 6.8 (b)) le long des fentes que sans régularisation (figure (a)). Ces

résultats sont en accord avec la solution physique du problème : en effet, la variation de distribution de courants dans les fentes doit être graduelle.



**Figure 6.8:** Technique de régularisation appliquée sur une antenne fente alimentée par une ligne de transmission coplanaire, les courants  $I_m$  sont représentés par les courbes. (a) sans régularisation, (b) avec régularisation. On montre aussi le champ proche mesuré dans le plan  $xy$ .

#### 6.7.1.4 Résultats en champ lointain avec la technique de régularisation

Les résultats des mesures en champ lointain calculés avec le logiciel avec et sans régularisation des courants ont été comparés avec les mesures expérimentales dans la chambre anéchoïde. Les résultats sans régularisation sont exposés à la Figure 4.12

et l'erreur relative sur le calcul de champ lointain est présentée dans le Tableau 6.4. On définit l'erreur relative sur le champ lointain dans le plan E ou le plan H par la relation suivante :

$$\varepsilon_{plan\ E/H} = \frac{\|FF_{reel} - FF_{calcule}\|}{\|FF_{reel}\|} \quad (6.9)$$

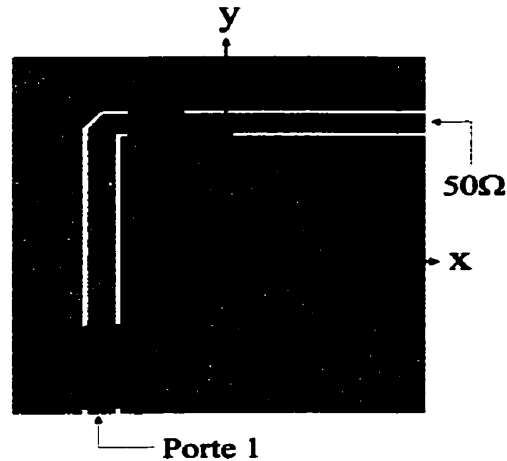
où  $FF_{reel}$  et  $FF_{calcule}$  représentent respectivement le champ lointain mesuré (pour tous les angles compris entre  $-100^\circ$  et  $100^\circ$ ) dans la chambre anéchoïde et le champ lointain recalculé. Ces valeurs sont normalisées par rapport à la valeur maximum ( $FF/FF_{max}$ ).

Le Tableau 6.4 montre que la variation sur le calcul de champ lointain ( $\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{avec\ regul} - \varepsilon_{sans\ regul}}{\varepsilon_{sans\ regul}}$ ) avec la méthode de régularisation est d'à peu près 1%. Il devient donc difficile de conclure que la méthode de régularisation améliore les calculs de champ lointain de manière significative. Cependant, il paraît visible que la solution trouvée par décomposition *SVD* est une méthode suffisamment fiable pour solutionner le système si on cherche seulement à déterminer le diagramme en champ lointain.

**Tableau 6.4:** Comparaison de l'erreur sur le champ lointain  $\varepsilon$  avec et sans régularisation.

	$\varepsilon_{planE/H}$	sans régularisation	avec régularisation	$\Delta_\varepsilon$
avec maillage filaire manuel	$\varepsilon_{planH}$ $\varepsilon_{planE}$	0,187 0,267	0,185 0,264	1% 1%
avec maillage grille rectangulaire	$\varepsilon_{planH}$ $\varepsilon_{planE}$	0,213 0,281	0,201 0,278	6% 1%

### 6.7.2 Application de la méthode de régularisation sur le calcul des courants sur une ligne de transmission coplanaire avec un coude

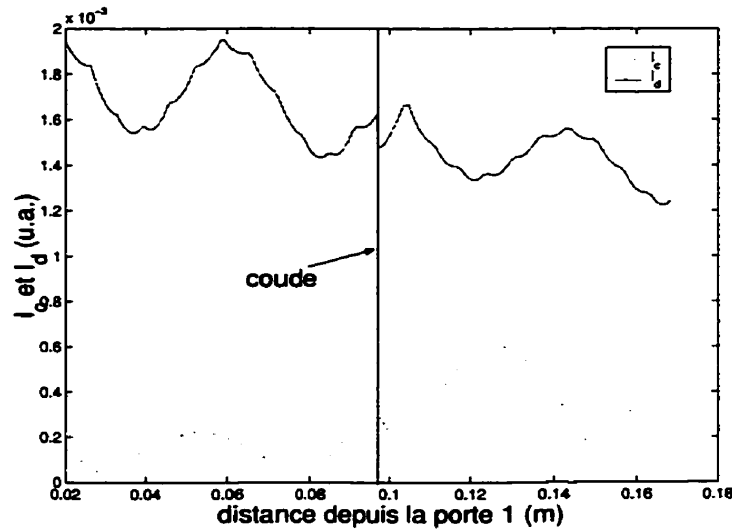


**Figure 6.9:** Ligne de transmission coplanaire avec coude. Le coude introduit une différence de parcours. Les amplitudes des courants  $I_1$  et  $I_2$  ne sont plus égales après le coude.

#### 6.7.2.1 Description de la structure étudiée

La méthode des courants magnétiques équivalents se prête bien à l'étude des coudes dans les lignes de transmission de type guide d'onde coplanaire. Un coude inséré sur une telle ligne introduit une différence de parcours entre les courants magnétiques équivalents qui circulent sur les deux bords de la ligne ( $I_1$ ,  $I_2$ ) (voir Figure 6.9). Cette différence de parcours se traduit par un déphasage. Les amplitudes des courants  $I_1$  et  $I_2$  ne sont plus égales après le coude. On le montre schématiquement à la Figure 6.9 puis expérimentalement à la Figure 6.10.

La ligne de transmission étudiée a les dimensions suivantes :  $10,5\text{cm}$  ( $\sim 1,2\lambda_{\text{guide}}$ )



**Figure 6.10:** Courants mode commun  $I_c$  et mode différentiel  $I_d$ , le long de la ligne de transmission coplanaire, après régularisation

de long avant le coude et après le coude et  $6\text{mm}$  de large entre les deux fentes. La ligne qui coupe le coude de  $90^\circ$  fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe des  $x$ .

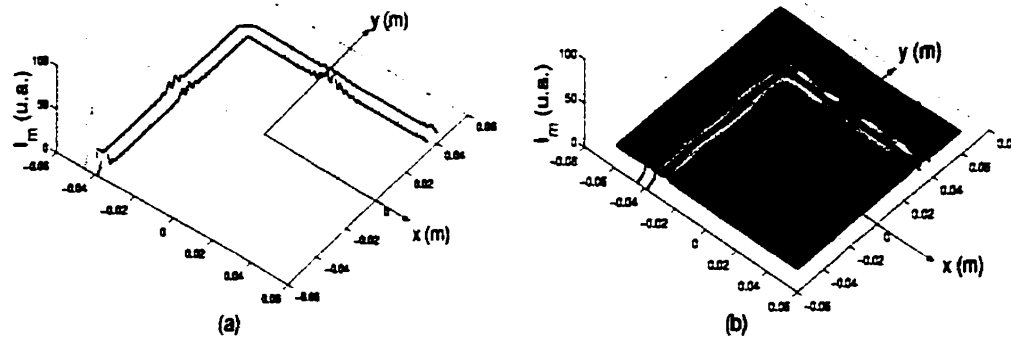
On peut définir les courants de mode commun ( $I_c$ ) et de mode différentiel ( $I_d$ ) :

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{|I_1 + I_2|}{2} \\ I_d &= \frac{|I_1 - I_2|}{2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

### 6.7.2.2 Paramètres expérimentaux

Les mesures en champ proche sont effectuées à une distance de  $2\text{mm}$  sur une grille de  $12\text{ cm} \times 12\text{ cm}$  avec 3600 points de mesure. L'orientation de la sonde est  $\phi = 45^\circ$ . Le maillage de courants est placé le long des fentes coplanaires parallèlement à celles-ci. Il y a 62 dipôles inconnus.

### 6.7.2.3 Courants magnétiques équivalents



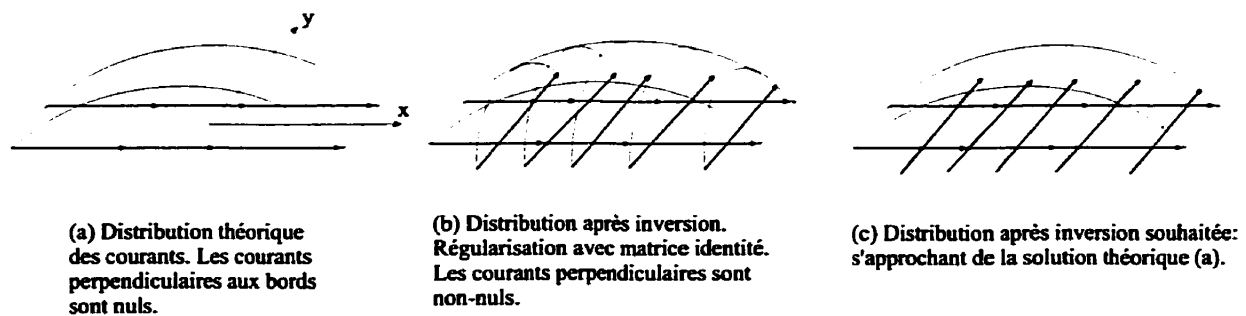
**Figure 6.11:** (a) Solution après inversion avec SVD. Cette solution souffre des problèmes de conditionnement de matrice. (b) Mesures en champ proche et solution après régularisation ( $f=2,45\text{GHz}$ ). La solution est en accord avec les mesures en champ proche.

La Figure 6.10 illustre la distribution des courants  $I_c$  et  $I_d$  le long de la ligne, après solution avec la méthode de régularisation. On peut constater que le courant en mode commun  $I_c$  devient plus important après le coude.

La méthode de courants magnétiques équivalents permet, dans cet exemple, d'analyser la propagation des ondes en présence de coudes dans la ligne de transmission. Aucune figure de mérite n'est malheureusement disponible dans cet exemple, on doit se fier à une inspection visuelle (figure 6.11 (b)) pour se convaincre que la solution trouvée correspond bien avec les mesures en champ proche. La Figure 6.11 (a) montre la solution après inversion par SVD sans régularisation, le nombre d'inconnues est élevé et les dipôles sont très petits ce qui entraîne des problèmes de conditionnement très visibles sur cette figure. La Figure (b) montre la solution après

régularisation avec les mesures en champ proche. La technique de régularisation a éliminé les problèmes de conditionnement de matrice, elle a pour effet d'adoucir la solution.

## 6.8 Régularisation appliquée sur des groupes de dipôles connectés

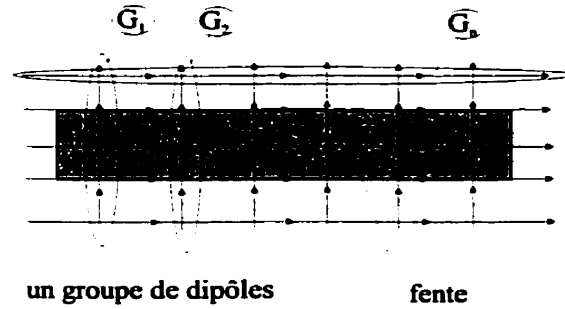


**Figure 6.12:** Distribution de courants le long d'un fente rayonnante. Cas théorique (a), cas pratiques (b) et (c).

Telle que développée dans la section 6.3, la méthode ne permet pas forcer la régularisation dans certaines directions privilégiées. Souvent, les courants sont concentrés le long du bord du conducteur (figure 6.12 (a)). Or, si on ne connaît pas l'emplacement de ces courants, ceux-ci sont représentés par une grille de dipôles (figure 6.12 (b)). Ces derniers sont orientés selon l'axe des  $X$  ou l'axe des  $Y$ . Certains dipôles sont pliés à  $90^\circ$  et orientés selon les deux directions à la fois. Cette disposition des dipôles combinée avec l'emploi de la matrice identité  $M$  dans la technique de régularisation a pour effet d'adoucir la distribution dans les deux directions (figure 6.12 (b)). L'utilisation de la matrice identité implique la minimisation de la norme des courants. Toutefois, pour s'approcher de la solution théorique, la solution doit indi-



quer de forts courants le long de la surface conductrice et de faibles courants dans le sens perpendiculaire (figure 6.12 (c)).



**Figure 6.13:** Les dipôles sont disposés sur la fente en formant des groupes. Les dipôles d'un même groupe  $G_n$  sont colinéaires.

Pour contourner ce problème nous allons modifier la contrainte de régularisation en utilisant le même formalisme que celui développé dans l'équation 6.5. Pour ce faire, on peut définir des groupes de dipôles  $G_n$  dont la solution régularisée sur chaque groupe est indépendante des autres groupes tel que montré à la Figure 6.13. Les dipôles d'un même groupe seront colinéaires. On peut donc subdiviser la solution  $I$  cherchée en plusieurs groupes de dipôles connectés :

$$I = \begin{pmatrix} [I_1] \\ [I_n] \\ \vdots \\ [I_G] \end{pmatrix}$$

où  $G$  représente le nombre de groupes de dipôles.

La contrainte de régularisation est appliquée sur chaque groupe de dipôles indé-

pendamment des autres. Le terme de pénalité global contenant tous les groupes peut alors s'écrire :

$$\|DI\|^2 = I^T \tilde{M} I = \begin{pmatrix} [I_1] \\ \vdots \\ [I_n] \\ [I_G] \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [M_1] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [M_n] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [M_G] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [I_1] \\ \vdots \\ [I_n] \\ [I_G] \end{pmatrix}$$

La matrice  $\tilde{M}$  est formée des sous matrices  $\tilde{M}_n$ . Les dimensions de la nouvelle matrice  $\tilde{M}$  sont de  $N \times N$ . Rappelons que  $N$  représente le nombre de dipôles inconnus au total. Le système à résoudre contenant le nouveau terme de régularisation peut s'écrire :

$$I_{\lambda_{min} \text{ GCV}} = \arg \min_I \{ \|Z I - V_{prb}\|^2 + \lambda \|DI\|^2 \} \quad (6.11)$$

où la matrice  $D$  est constituée des sous matrices  $D_n$  de différences premières. Nous reviendrons plus loin sur la définition de  $D_n$ . Notons que le paramètre de régularisation  $\lambda$  est toujours estimé à l'aide de la fonction GCV. En effet, on postule que la qualité de l'estimation de la fonction GCV est indépendante de la technique de régularisation (même si bien entendu la fonction GCV donnera un  $\lambda_{min}$  différent).

Dans la section précédente, la contrainte utilisée permettait de minimiser la norme des courants. Cette fois, la contrainte de régularisation qui sera appliquée sur chaque groupe de dipôles permettra de minimiser la différence entre deux termes successifs

de dipôles connectés :

$$\|D_n I_n\|^2 = I^T (D_n^T D_n) I = I_n^T \tilde{M}_n I_n \propto \sum_{i=1}^{J-1} [I_i - I_{i+1}]^2 \quad (6.12)$$

où  $J$  est le nombre dipôles contenus dans un même groupe. L'indice  $n$  est associé à un groupe de dipôles. Notons que cette contrainte a l'effet d'un filtre passe-bas. La matrice des différences premières  $D_n$  peut s'écrire :

$$D_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\tilde{M}_n$  des différences secondes est donnée par :

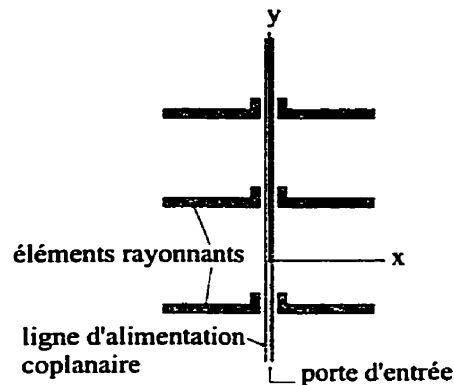
$$\tilde{M}_n = D_n^T D_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice  $\tilde{M}_n$  est associée à un groupe  $G_n$  de dipôles connectés.

Bien que la matrice  $\tilde{M}$  soit une matrice de différences secondes, cette méthode est quand même appelée *méthode de régularisation par un terme de pénalité de différences premières appliqué sur des groupes de dipôles connectés*.

Cette méthode permet d'imposer une contrainte de régularité sur les dipôles qui sont connectés entre eux, et offre donc plus de flexibilité pour représenter les discontinuités. Nous verrons un exemple d'application à la section suivante.

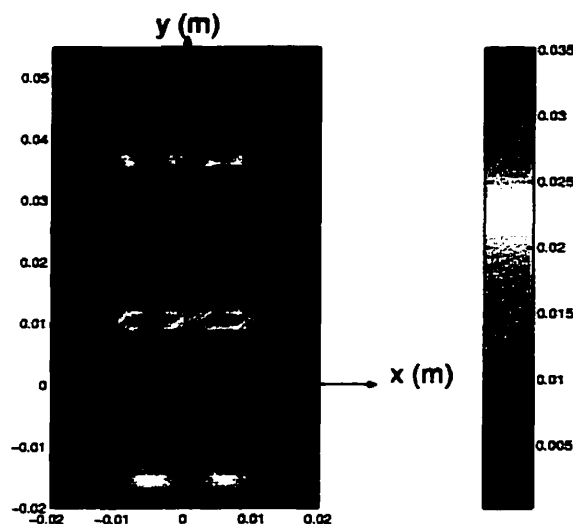
### 6.8.1 Application à une antenne fente à trois éléments couplés par une ligne de transmission coplanaire



**Figure 6.14:** Schéma de l'antenne fente à trois éléments d'après [23].

#### 6.8.1.1 Description de la structure étudiée et mesures en champ proche

On étudie dans cette section une antenne fente développée par [23], plus complexe que celle qui a été analysée dans la section 4.2. Il s'agit d'une antenne contenant trois fentes rayonnantes placées en série le long d'une ligne de transmission. La

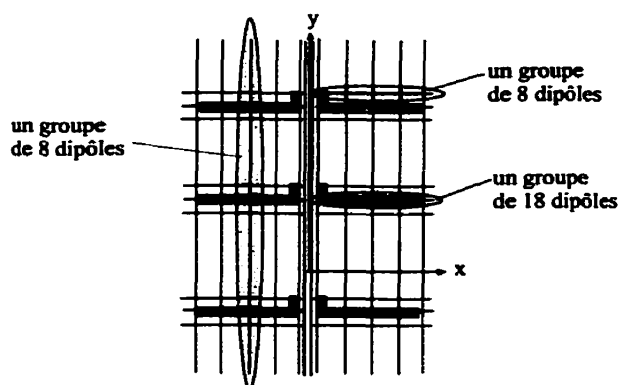


**Figure 6.15:** Mesures en champ proche (distance de l'antenne de 2mm).  
L'orientation de la sonde est de  $45^\circ$  et le nombre de points de mesure est de 2400 ( $40 \times 60$ ).

forme des fentes est similaire à celle étudiée dans la section 4.2. Les dimensions sont cependant différentes. La fréquence d'opération est de 5GHz. Pour mieux comprendre le fonctionnement, un schéma de l'antenne présenté dans [23] est reproduit ici à la Figure 6.14. Les mesures en champ proche sont montrées à la Figure 6.15. Il faut noter que dans cet exemple, le champ proche n'a été mesuré que pour une seule orientation de la sonde ( $\phi = -45^\circ$  toujours défini par rapport à l'axe de  $x$ ). Il y a 2400 points de mesure.

#### 6.8.1.2 Définition de la surface de maillage

La surface de maillage (figure 6.16) utilise 28 groupes de dipôles formant un total de 284 dipôles. Les groupes sont alignés par rapport au système d'axe  $xy$ . Chaque

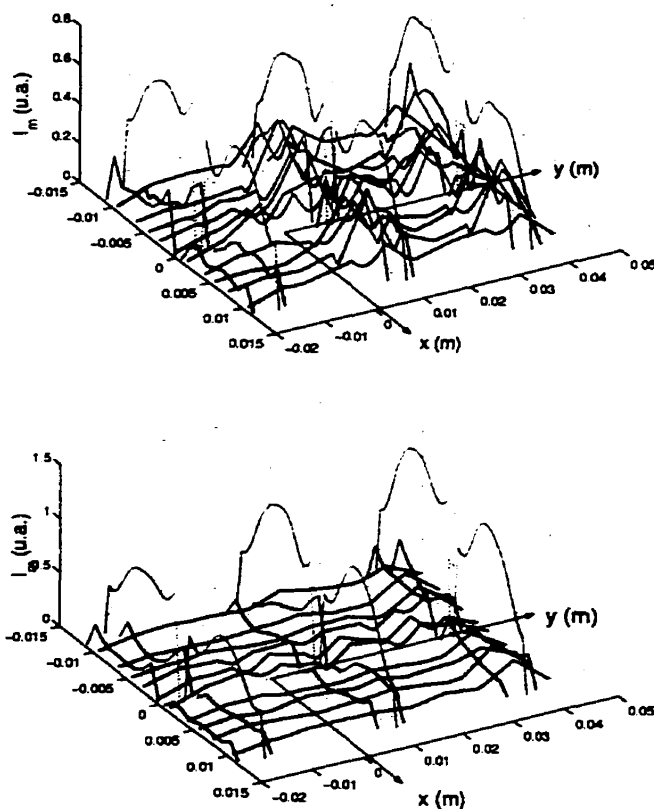


**Figure 6.16:** Maillage sur l'antenne fente. Chaque ligne représente un groupe de dipôles  $G_n$ .

groupe contient 8 dipôles sauf au dessus des fentes (parallèlement à celles-ci) où nous avons augmenté la résolution en définissant des groupes de 18 dipôles. Notons qu'à chaque fente est associé un groupe de dipôles parallèle à l'axe des  $x$ . C'est-à-dire que les groupes de dipôles parallèles à l'axe des  $x$  ne traversent pas l'axe des  $y$ . Cela permet de découpler la solution entre les fentes de chaque côté de l'axe des  $y$ .

### 6.8.1.3 Courants magnétiques équivalents

La Figure 6.17 (a) présente la solution régularisée avec une matrice  $\mathbf{M}$  identité. Alors que la Figure 6.17 (b) montre la solution régularisée par un terme de pénalité de différences premières appliqué sur des groupes de dipôles connectés tel que défini à l'équation 6.12. Une inspection visuelle rend compte de l'effet de la technique de régularisation appliquée à des groupes de dipôles connectés. On voit facilement que cette nouvelle technique de régularisation permet d'obtenir une solution en accord avec la solution théorique (telle que montrée par exemple à la Figure 6.12 (a)). En



**Figure 6.17:** (a) Solution avec régularisation utilisant la matrice identité. (b) Solution avec régularisation utilisant la matrice des différences premières. Il y a 284 dipôles disposés en 28 groupes.

effet, la Figure 6.17 (b) nous permet de constater que les courants perpendiculaires à la fente sont presque nuls. Le rapport de surdimensionnement est élevé (2400 points de mesures et 284 dipôles soit un rapport de 10), pour être rigoureux il faudrait sans doute reproduire cette expérience avec moins de points de mesure afin de s'assurer que la technique de régularisation fonctionne toujours aussi bien dans des conditions plus raisonnables.

En conclusion, le raffinement de la technique de régularisation permet d'obtenir

des résultats plus cohérents avec la théorie. Peu de calculs supplémentaires sont nécessaires, et le temps de calcul total est le même (par rapport à la technique de régularisation utilisant la matrice identité). Cette technique de régularisation, comme la précédente, permet de réduire le nombre de points de mesures. En effet, une seule orientation de la sonde est nécessaire pour trouver la solution inverse. Évidemment, le nombre d'orientations de sonde dépend aussi de la structure étudiée. En effet, il faut s'assurer de capter avec la sonde le maximum d'information sur les champs rayonnés pour pouvoir les représenter correctement. L'influence du bruit et du surdimensionnement n'a pas été étudiée, mais on peut faire l'hypothèse que le comportement de cette technique face à ces deux paramètres est similaire à celui la technique de régularisation avec matrice identité. Cette technique ne nécessite pas la connaissance *a priori* de l'emplacement des sources de courant. Dans cet exemple, les groupes de dipôles sont colinéaires. Mais il est possible d'utiliser cette technique avec des groupes de dipôles connectés orientés dans n'importe quelle direction, dans la mesure où la disposition des dipôles demeure cohérente avec l'orientation physique des discontinuités du circuit sous test. Afin d'obtenir un meilleur résultat, on suggère de définir une grille dont chaque rangée et colonne représente un groupe de dipôles tel que montré à la Figure 6.13.



## 6.9 Conclusion

On a montré que le principe de la méthode des courants magnétiques équivalents est sensible aux différentes sources d'erreur ainsi qu'aux manipulations de matrices.

On a développé une méthode de régularisation robuste qui permet d'amoindrir l'effet de ces différentes sources d'erreur. On a vérifié la pertinence de l'utilisation de la validation croisée (GCV) comme estimateur robuste du paramètre de régularisation à partir de simulations. Celles-ci sont effectuées à partir de courants sources connus pour déterminer des prises de mesures fictives sur lesquelles est ajouté un bruit variable. Au dessous d'un certain seuil d'erreur, la technique de régularisation de Tikhonov permet de diminuer l'effet des sources d'erreur et de retrouver les courants. Ce seuil d'erreur maximum au dessous duquel la solution régularisée est assez proche du résultat réel dépend de la source d'erreur et est difficilement quantifiable.

La technique de régularisation utilisant la matrice identité permet de trouver une solution cohérente avec les mesures en champ proche sans toutefois pouvoir représenter les discontinuités dans les sources de courant. La technique de régularisation utilisant la matrice des différences premières permet de régulariser là où le courant est continu tout en respectant les discontinuités dans la solution. Cela suppose toutefois une connaissance *a priori* de la direction des continuités et discontinuités dans la solution.

Les impacts positifs de la méthode de régularisation sur la méthode de mesure en champ proche peuvent se résumer par les points suivants :

- **réduction** de l'effet des différentes sources d'erreur, telles qu'un bruit blanc introduit dans les mesures de la sonde ou l'erreur de distance entre le plan de mesure de la sonde et le plan contenant les sources.
- **élimination** des problèmes de mauvais conditionnement de matrices.
- **diminution** du nombre de points de mesure dans certains cas. Avec la méthode d'inversion *SVD*, les mesures ( $V_{prb}$ ) sont effectuées selon deux orientations de sonde pour compenser les problèmes de conditionnement de matrice, alors que la technique de régularisation permet d'inverser le système avec seulement une seule orientation de sonde, diminuant ainsi par 2 le temps de prise de mesures et le temps de remplissage de la matrice d'impédance mutuelle. Cela se fait bien sûr, au prix d'un calcul supplémentaire du paramètre de régularisation  $\lambda$ . Évidemment, le nombre d'orientations de sonde dépend aussi de la structure étudiée. En effet, il faut s'assurer de capter avec la sonde le maximum d'information sur les champs rayonnés pour pouvoir les représenter correctement. Cependant, il serait possible de modifier notre montage expérimental afin de pouvoir sélectionner une orientation de la sonde pour chaque position (cela nécessite la connaissance *a priori* de la géométrie de la structure étudiée). On pourrait ainsi s'assurer de capter le champ pour toutes les positions et ainsi acquérir le maximum d'information sur le rayonnement.

Le seul point négatif notable de cette méthode de régularisation est qu'elle ap-

porte peu d'amélioration concernant le diagramme de champ lointain. L'inversion du système par la méthode *SVD* est suffisante dans ce cas.

## CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS

### Contributions

Un montage expérimental a été développé au sein du laboratoire Poly-Grames. Ce montage permet la prise de mesures en champ proche et l'enregistrement des données. Il est constitué d'une table de mesure, d'un ordinateur de contrôle et d'un analyseur de réseau. Une sonde est fixée au bout d'un bras contrôlé par ordinateur et pouvant se déplacer sur un plan parallèle au plan contenant l'antenne sous test. L'analyseur de réseau permet de lire la mesure du champ électrique induit dans la sonde et émis par l'antenne sous test.

**On a développé un algorithme de calcul qui permet de diminuer le temps de calcul l'impédance mutuelle de dix fois dans certaines conditions.**

On a validé expérimentalement la méthode en mesurant les champs proches de deux antennes fabriquées au laboratoire. La première antenne étudiée est une antenne fente alimentée par une ligne microruban, la seconde est une antenne fente couplée par une ligne d'alimentation coplanaire. Les mesures en champ proche ont permis de calculer les courants magnétiques équivalents et les diagrammes de rayonnement en champ lointain. Les diagrammes de rayonnement en champ lointain sont comparés avec les résultats obtenus dans la chambre anéchoïde. **La concordance entre les résultats calculés et les résultats expérimentaux permet de conclure que cette méthode de mesure en champ proche peut remplacer les mesures**

**en champ lointain effectuées dans la chambre anéchoïde.** Les calculs de diffraction limitent cependant la précision des résultats de certains diagrammes en champ lointain.

À partir de ces mesures expérimentales, les différentes sources d'erreur ont été étudiées. L'une des principales, la perturbation de la sonde, a été analysée en détail. On a démontré que la perturbation de la sonde, à cause de sa géométrie, avait un faible impact sur la précision des mesures en champ proche. En conséquence, **la perturbation de la sonde sur les mesures en champ proche peut être considérée comme négligeable.**

On a établi que le principe de la méthode des courants magnétiques équivalents est sensible aux différentes sources d'erreur ainsi qu'aux différentes manipulations de matrices. La détermination des courants devient difficile à cause des problèmes de conditionnement de matrice.

Pour pallier ce problème, **on a développé une méthode de régularisation robuste permettant de réduire l'effet de ces différentes sources d'erreur.** La technique de régularisation de Tikhonov est employée pour contraindre la solution à des valeurs du même ordre de grandeur. On a tenté de valider cette technique en l'appliquant à des mesures en champ proche effectuées dans le cadre de la validation expérimentale. **On a montré que la technique de régularisation permet de diminuer les discontinuités dans la solution.** En effet, pour représenter fidèle-

ment le courant circulant dans la structure, les courants sources doivent être continus le long des lignes de transmission.

Avec la méthode d'inversion *SVD*, les mesures en champ proche sont effectuées selon deux orientations de sonde pour compenser les problèmes de conditionnement de matrice. La technique de régularisation permet de diminuer le nombre d'orientations de sonde dans certains cas et le nombre de points de mesures, et d'éliminer les problèmes de conditionnement de matrice. La méthode de régularisation apporte peu d'améliorations concernant le diagramme de champ lointain. L'inversion du système par la méthode *SVD* est suffisante dans ce cas.

La technique de régularisation de Tikhonov utilisant la matrice des différences premières sur un groupe de dipôle permet de contrôler les discontinuités dans la solution. **Cette méthode de régularisation permet de représenter fidèlement les problèmes d'électromagnétisme où l'emplacement et l'orientation des courants sont inconnus.**

### Travaux futurs

La méthode des courants équivalents est une technique prometteuse car elle nécessite un appareillage peu coûteux, tout en fournissant plusieurs types d'informations précises sur la structure rayonnante étudiée. Elle permet d'identifier les courants à la surface de l'antenne sous test et de prédire le diagramme de rayonnement en champ lointain de celle-ci. Par exemple, elle pourra éventuellement être utilisée pour

analyser des circuits à très haute fréquence et de très petites dimensions, ce qui nécessitera une plus grande précision absolue. À cet effet, le programme et le montage expérimental qui permettent le calcul des caractéristiques de la structure rayonnante nécessiteront certaines améliorations :

- Le système d'ajustement de la coplanarité du plan de mesure et du plan de l'antenne sous test. Le plan de mesure doit être coplanaire avec le plan du circuit à mesurer. Cette contrainte est assurée par un système de vis en trois points ajustées lors du déplacement de la sonde. On s'assure que la distance de la sonde au circuit reste constante. Ce système n'est pas suffisamment précis pour effectuer des mesures sur des circuits de petites dimensions.
- La mesure de la distance du plan de mesure par rapport au plan contenant les sources de courant. La distance entre le plan de mesure et le plan contenant les sources de courants est mesurée avec un vernier précis au dixième de millimètre, appareil qui convient pour effectuer des mesures de circuits de grande taille à basse fréquence. Mais l'étude de structures rayonnantes à haute fréquence et de dimensions plus petites nécessitera l'amélioration de la précision sur les différents paramètres mesurés manuellement.
- Le calcul de diffraction de premier ordre entre deux bords non parallèles. Dans l'état actuel du programme *Slot*, le calcul de double diffraction de premier ordre entre deux bords parallèles est considéré. Lorsque les dimensions du plan de masse sont petites (de l'ordre de quelques longueurs d'onde), les phéno-

mènes de diffractions multiples deviennent importants et devraient être pris en compte. Ceci explique les différences entre les diagrammes de rayonnement en champ lointain de certaines structures étudiées. L'introduction du calcul de diffraction multiple entre deux bords non parallèles réduirait aussi l'erreur sur les diagrammes de rayonnement.

- La largeur de bande de la sonde. La largeur de bande sonde dipôle fabriquée est limitée par le circuit hybride  $180^\circ$  qui la constitue. Il serait donc avantageux de concevoir une sonde qui puisse fonctionner dans une gamme de fréquences plus grande.
- La connaissance des discontinuités avec l'utilisation de la technique de régularisation. La technique de régularisation avec la matrice des différences premières nécessite la connaissance de la direction des discontinuités, afin de séparer les groupes de dipôles. Cette nécessité constitue une limite en soi, dans la mesure où l'utilisateur ne possède pas forcément cette information. D'autres techniques de régularisation plus complexes pourraient alors être envisagées.



## RÉFÉRENCES

- [1] ABRAMOWITZ, M., et EDS, I. A. S. (1964). *Handbook for Mathematical Functions*. Appl. Math. Ser. 55 Washington, DC : Nat. Bur. Stand.
- [2] BEVINGTON, et R., P. (1969). *Data Reduction and error analysis for the Physical Sciences*. McGraw-Hill.
- [3] GOLUB, G., HEATH, M., et WAHBA, G. (1979 mai). Generalized Cross-Validation as a Method for Choosing a Good Ridge Parameter. *Technometrics*, 21, 215–223.
- [4] GROETSCH. (1984). *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*. Pitman, Boston.
- [5] HANSEN, P. C. (1998 mars). A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-Posed Problems. *www.imm.dtu.dk/~pch*.
- [6] HYGATE, G., et NYE, J. F. (1990). Measuring Microwave Near-Fields Directly with an Optically Modulated Scatterer. *Meas. Sci. Technol.*, 1, 703–709.
- [7] JOISEL, A., MALLORQUI, J., BROQUETAS, A., GEFFRIN, J., JOACHIMOWICZ, N., LOSSERA, M., JOIRE, L., et BOLOMEY, J. (1999 mai). Microwave Imaging Techniques for Biomedical Applications. *Proceedings of the 16th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, 3, 1591–1596.

- [8] JOY, E. B., et PARIS, D. (1972 mai). Spacial Sampling and Filtering in Near-Field Measurements. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-20, 253–261.
- [9] KING, H. E. (1957 juillet). Mutual Impedance of Unequal Length Antennas in Echelon. *IRE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-45, 306–313.
- [10] KLUSKENS, M. S. (1999 mai). A New Algorithm for the Complex Exponential Integral in the Method of Moments. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-47, 803–806.
- [11] KRAUSS, J. D. (1988). *Antennas*. McGraw-Hill.
- [12] LAURIN, J.-J. (1993). Near-Field Diagnostics of Small Printed Antennas using the Equivalent Magnetic Current Approach. *EMC Dallas*, AP-40, 322–326.
- [13] LAURIN, J.-J., OUARDHIRI, Z., et COLINAS, J. (2001). Near-field Imaging of Radiated Emission Sources on Printed-Circuit Boards. *EMC Montreal*.
- [14] LIU, K., BALANIS, C. A., et C.BARBER, G. (1991 mai). Exact Mutual Impedance Between Sinusoidal Electric and Magnetic Dipoles. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-39, 684–686.
- [15] NASHED, M. Z. (1981 mars). Operator-Theoretic and Computational Approaches to Ill-Posed Problems with Applications to Antenna theory. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 29, 220–226.

- [16] OUARDIRHI, Z. (2000). *Technique expérimentale de mesure en champ proche pour le calcul du champ lointain d'éléments rayonnants filaires, mémoire de maîtrise*. Ecole Polytechnique de Montréal.
- [17] PETRE, P., et SARKAR, T. K. (1992 novembre). Planar Near-Field to Far-Field Transformation Using an Equivalent Magnetic Current Approach. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-40, 1348–1356.
- [18] PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A., et VETTERLING, W. T. (1990). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press.
- [19] RICHMOND, J. (1974 juin). Computer program for thin-wire structures in a homogeneous conducting medium. *Nat Tech. Inform. Serv. Springfield, VA. Tech. Rep. NASA Contractor Rep CR-2399*.
- [20] RICHMOND, J., et GEARY, N. (1975 mai). Mutual Impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-23, 412–414.
- [21] SARKAR, T. K., WEINER, D. D., et JAIN, V. K. (1981 mars). Some Mathematical Considerations in Dealing with the Inverse Problem. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 29, 373–379.
- [22] SHAHIDI, A. V., SAVARD, P., et NADEAU, R. (1994 mars). Forward and Inverse Problems of Electrocardiography : modeling and Recovery of Epicardial Potentials in Humans. *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, 41, 249–256.

- [23] SIERRA-GARCIA, S., et LAURIN, J.-J. (1999 janvier). A study of a CPW Inductively Coupled Slot-Antenna. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-47, 58–64.
- [24] STUTZMAN, W. L., et THIELE, G. A. (1981). *Antenna Theory and Design*. John Wiley & Sons.
- [25] TILSTON, M., et BALMAIN, K. (1990 février). On the suppression of asymmetric artifacts arising in an implementation of the thin-wire method of moments. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-38, 281–285.
- [26] WAHBA, G. (1990). Spline Models for Observational Data. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 59.
- [27] WHETTEN, F. L., LIU, K., et BALANIS, C. A. (1999 mai). An Efficient Numerical Integral In Three-Dimensional Electromagnetic Computations. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, AP-47, 803–806.
- [28] ZÜRCHER, J. F. (1992 juin). A Near Field Measurement Method Applied to Planar Structures. *Micro Wave Eng. Eurp.*, 43–51.

## ANNEXE A

### DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE DU CALCUL DE L'IMPÉDANCE À PARTIR DE L'EXPRESSION DE LAURIN

Comme souligné dans les résultats du Chapitre 2, plusieurs tentatives pour rendre cette routine de calcul plus performante que sa version par quadrature de Gauss-Kronrod ont échoué.

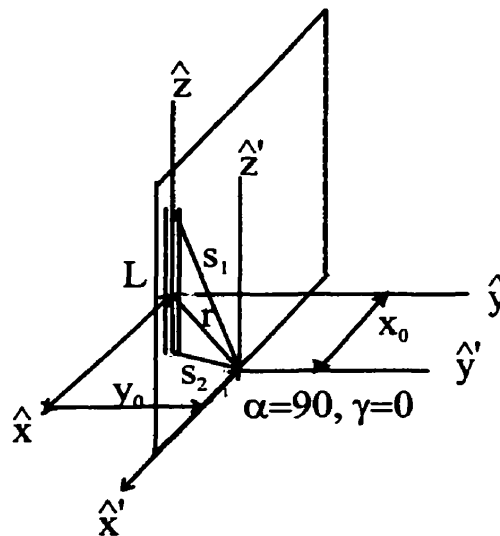
Cette expression analytique n'étant aussi rapide que le calcul par quadrature de Gauss-Kronrod, le développement analytique développé est utilisé uniquement pour démontrer la cohérence entre les expressions de l'impédance mutuelle développés par Balanis [14] et celle de Laurin [12].

En effet, le cheminement suivi dans cette section est basé sur des travaux (datant des années 1950) effectués par King pour calculer l'impédance entre deux dipôles électriques [9]. (Le développement analytique consiste simplement à exprimer l'équation 2.10 en une somme d'intégrales dont l'expression de l'intégrand est plus simple). Ces expressions ont été largement améliorées en terme de temps de calcul aux cours des années, notamment grâce à Richmond [19]. King avait obtenu une expression analytique en termes de fonctions transcendantes  $Ci[z]$  et  $Si[z]$  (les intégrales du sinus et cosinus d'un nombre complexe), alors que Richmond a simplifié l'expression de l'impédance pour l'exprimer en terme de  $\text{Exp}[z]$ .

La formule analytique de l'impédance sera développée dans deux configurations

spatiales particulières : soit la position de couplage maximum (où les dipôles sont perpendiculaires dans deux plans non-confondus) et la position de couplage minimum (où les dipôles sont contenus dans un même plan). Dans le cas où les dipôles sont contenus dans un même plan, cette dernière s'évalue très simplement : le couplage est nul dans ce cas, et donc l'impédance aussi. Dans le cas où les dipôles sont perpendiculaires et contenus dans deux plans non-confondus, (voir Figure A.1), les angles  $\alpha$  et  $\gamma$  prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &= 0^\circ \\ \gamma &= 90^\circ\end{aligned}\tag{A.1}$$



**Figure A.1:** Géométrie du nouveau problème : dipôle électrique et monopôle magnétique pour le développement analytique

L'équation 2.10 peut s'exprimer en termes de fonction  $Ci[z]$ ,  $Si[z]$ . Après quelques

changements de variables et de longues manipulations trigonométriques, on définit les bornes d'intégrations suivantes :

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= x_0 - \sqrt{x_0^2 + A_1} \\
 u_{11} &= x_0 + l/2 - \sqrt{(x_0 + l/2)^2 + A_1} \\
 u_{13} &= x_0 + \sqrt{(x_0)^2 + A_1} \\
 u_{14} &= x_0 + l/2 + \sqrt{(x_0 + l/2)^2 + A_1} \\
 u_{21} &= x_0 - \sqrt{x_0^2 + A_2} \\
 u_{21} &= x_0 + l/2 - \sqrt{(x_0 + l/2)^2 + A_2} \\
 u_{23} &= x_0 + \sqrt{(x_0)^2 + A_2} \\
 u_{24} &= x_0 + l/2 + \sqrt{(x_0 + l/2)^2 + A_2} \\
 u_{R1} &= x_0 - \sqrt{x_0^2 + R_1} \\
 u_{R1} &= x_0 + l/2 - \sqrt{(x_0 + l/2)^2 + R_1} \\
 u_{R3} &= x_0 + \sqrt{(x_0)^2 + R_1} \\
 u_{R4} &= x_0 + l/2 + \sqrt{(x_0 + l/2)^2 + R_1}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

avec les définitions suivantes :

$$A_1 = y_0^2 + z_0^2 + (L/2)^2 + z_0 L$$

$$A_2 = y_0^2 + z_0^2 + (L/2)^2 - z_0 L$$

$$R_1 = y_0^2 + z_0^2 \tag{A.3}$$



Finalement, l'intégrale analytique de l'équation 2.10 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 Z_{ab} = & -y_0 K [ \\
 & \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{11}}^{u_{12}} g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{13}}^{u_{14}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & + \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{11}}^{u_{12}} g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{13}}^{u_{14}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & - \cos(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{11}}^{u_{12}} g(u) \sin \beta u \, du + \int_{u_{13}}^{u_{14}} g(u) \sin \beta u \, du \right) \\
 & - j \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{11}}^{u_{12}} g(u) \sin \beta u \, du - \int_{u_{13}}^{u_{14}} g(u) \sin \beta u \, du \right) \\
 & + j \cos(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{11}}^{u_{12}} -g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{13}}^{u_{14}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & + \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{21}}^{u_{22}} g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{23}}^{u_{24}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & + \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{21}}^{u_{22}} g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{23}}^{u_{24}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & - \cos(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{21}}^{u_{22}} g(u) \sin \beta u \, du + \int_{u_{23}}^{u_{24}} g(u) \sin \beta u \, du \right) \\
 & - j \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{21}}^{u_{22}} g(u) \sin \beta u \, du - \int_{u_{23}}^{u_{24}} g(u) \sin \beta u \, du \right) \\
 & + j \cos(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{21}}^{u_{22}} -g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{23}}^{u_{24}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & - 2 \cos(\beta L/2) \{ \\
 & \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{R1}}^{u_{R2}} g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{R3}}^{u_{R4}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & + \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{R1}}^{u_{R2}} g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{R3}}^{u_{R4}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \\
 & - \cos(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{R1}}^{u_{R2}} g(u) \sin \beta u \, du + \int_{u_{R3}}^{u_{R4}} g(u) \sin \beta u \, du \right) \\
 & - j \sin(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{R1}}^{u_{R2}} g(u) \sin \beta u \, du - \int_{u_{R3}}^{u_{R4}} g(u) \sin \beta u \, du \right) \\
 & + j \cos(\beta (l/2 + x_0)) \left( \int_{u_{R1}}^{u_{R2}} -g(u) \cos \beta u \, du + \int_{u_{R3}}^{u_{R4}} g(u) \cos \beta u \, du \right) \} ] \\
 & \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

où la constante  $K$  est définie seulement pour des fins de clarté :

$$K = \frac{j \sin \alpha}{4 \pi \sin(\beta l/2) \sin(\beta L/2)} \quad (\text{A.5})$$

et  $g(u)$  donné par :

$$g(u) = \begin{cases} \frac{-(-u^2 - A_1)}{(-u^2 - A_1)^2 + 4(-A_1 + y_0^2)u^2} & u = u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14} \\ \frac{-(-u^2 - A_2)}{(-u^2 - A_2)^2 + 4(-A_2 + y_0^2)u^2} & u = u_{21}, u_{22}, u_{23}, u_{24} \\ \frac{-(-u^2 - R_1)}{(-u^2 - R_1)^2 + 4(-R_1 + y_0^2)u^2} & u = u_{R1}, u_{R2}, u_{R3}, u_{R4} \end{cases}$$

l'expression analytique exacte de l'intégrale  $\int g(u) \cos u \, du$  et  $\int g(u) \sin u \, du$

est :

$$\begin{aligned} \int g(u) \cos u \, du &= \\ &\sum_{i=1}^4 \frac{-\cos(\beta x_i) \text{Ci}[\beta(u - x_i)]x_i - \sin(\beta x_i) \text{Si}[\beta(u - x_i)]}{-A + 2y_0^2 - x_i^2} + \\ &\sum_{i=1}^4 \frac{A\{\cos(\beta x_i) \text{Ci}[\beta(u - x_i)] - \sin(\beta x_i) \text{Si}[\beta(u - x_i)]\}}{Ax_i - 2y_0^2x_i - x_i^3} \\ \int g(u) \sin u \, du &= \\ &\sum_{i=1}^4 \frac{-\sin(\beta x_i) \text{Ci}[\beta(u - x_i)]x_i - \cos(\beta x_i) \text{Si}[\beta(u - x_i)]}{-A + 2y_0^2 - x_i^2} + \\ &\sum_{i=1}^4 \frac{A\{\sin(\beta x_i) \text{Ci}[\beta(u - x_i)] - \cos(\beta x_i) \text{Si}[\beta(u - x_i)]\}}{Ax_i - 2y_0^2x_i - x_i^3} \end{aligned}$$

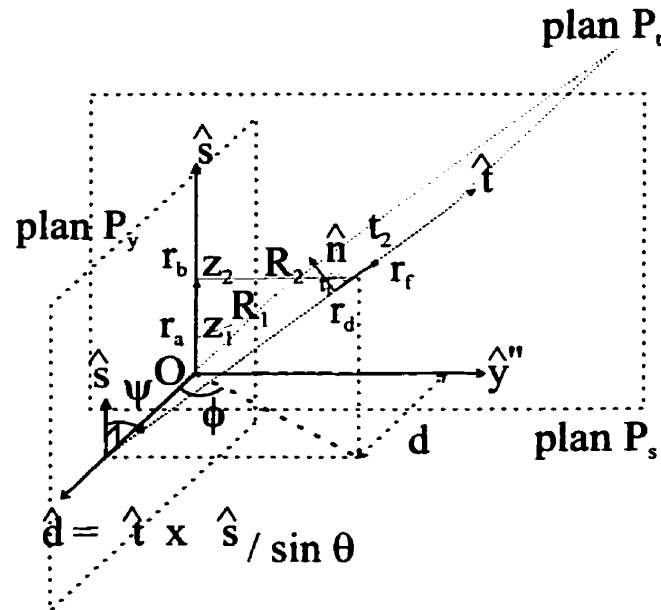
(A.6)

où les fonctions  $\text{Ci}[z]$  et  $\text{Si}[z]$ , représentent l'intégrale du cosinus et du sinus. Malheureusement ces intégrales du cosinus et du sinus, n'ont pas de primitives et sont peuvent être évaluées à l'aide de développements en série ou avec des méthodes numériques de quadrature ou à l'aide de l'intégrale exponentielle  $\text{Exp}[z]$  déjà définie dans les chapitres précédents.

## ANNEXE B

### PASSAGE D'UN RÉFÉRENTIEL ORTHONORMAL QUELCONQUE AU SYSTÈME DE COORDONNÉES DÉFINI PAR RICHMOND

Cette section présente le développement permettant le passage d'un système de coordonnées où les vecteurs  $\bar{r}_a, \bar{r}_b, \bar{r}_c, \bar{r}_d, \bar{r}_e, \bar{r}_f$  sont exprimés dans une base orthonormale quelconque au référentiel défini par Liu et Balanis. Ce référentiel est identique à celui défini par Richmond [19]. Les vecteurs  $\bar{r}_a, \bar{r}_b, \bar{r}_c, \bar{r}_d, \bar{r}_e, \bar{r}_f$  forment les segments de dipôles montrés à la Figure 2.4. Le référentiel défini par Liu et Balanis est montré à la Figure B.1.



**Figure B.1:** Référentiel défini par Richmond. Il suffit d'effectuer un changement de variables pour obtenir la Figure 2.3.

Soit  $\hat{s}$  un vecteur unitaire pointant de  $\bar{r}_a$  vers  $\bar{r}_b$  appartenant au plan  $P_s$ . Soit  $\hat{t}$ , un vecteur unitaire pointant de  $\bar{r}_d$  vers  $\bar{r}_f$  et appartenant au plan  $P_t$ . On a aussi  $\hat{s} \cdot \hat{t} = \cos \theta$ , où  $\theta$  est l'angle formé entre les angles des monopôles. Soit  $\hat{d}$ , le vecteur formé par le produit vectoriel entre  $\hat{s}$  et  $\hat{t}$ . Soit  $\hat{y}''$ , le vecteur formé par le produit vectoriel entre  $\hat{s}$  et  $\hat{d}$ .

$$\begin{aligned}\hat{s} &= \frac{\bar{r}_a - \bar{r}_b}{|\bar{r}_a - \bar{r}_b|} \\ \hat{t} &= \frac{\bar{r}_d - \bar{r}_f}{|\bar{r}_d - \bar{r}_f|} \\ \hat{d} &= \frac{(\bar{r}_a - \bar{r}_b) \times (\bar{r}_d - \bar{r}_f)}{|(\bar{r}_a - \bar{r}_b) \times (\bar{r}_d - \bar{r}_f)|} \\ \hat{y}'' &= \hat{s} \times \hat{d} \\ \hat{n} &= \hat{x} \times \hat{t}\end{aligned}$$

(B.1)

On identifie l'origine  $\bar{O} = (O_x, O_y, O_z)$  dans le système de coordonnées comme l'intersection des trois plans  $P_s, P_y, P_n$  (voir Figure B.1). Le point  $\bar{r}_a$  appartient au plan  $P_y$  et  $P_s$  et  $\bar{r}_d$  appartient au plan  $P_t$ .

On veut exprimer les coordonnées de l'origine  $(O_x, O_y, O_z)$  en fonction des vecteurs  $\bar{r}_a, \bar{r}_b, \bar{r}_c, \dots, \bar{r}_f$ . Donc,  $\bar{r}_a \cdot \hat{d}$  est égal à la distance du vecteur  $O$  projetée sur

l'axe formé par le vecteur unitaire  $\hat{d}$ . Sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} [\hat{d}] \\ [\hat{y}''] \\ [\hat{n}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_x \\ O_y \\ O_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_a \cdot \hat{d} \\ \bar{r}_a \cdot \hat{y}'' \\ \bar{r}_f \cdot \hat{n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

L'inversion de la matrice permet de trouver le vecteur  $O$ . Une fois l'origine déterminée, on exprime facilement les autres paramètres :

$$\begin{aligned} z_1 &= |\bar{r}_a - \bar{O}| \\ z_2 &= |\bar{r}_b - \bar{O}| \\ t_1 &= (\bar{r}_d - \bar{O}) \cdot \hat{t} \\ t_2 &= (\bar{r}_f - \bar{O}) \cdot \hat{t} \\ d &= (\bar{r}_d - \bar{r}_a) \cdot \hat{s} \\ \cos \psi &= |\hat{n} \times \hat{s}| \\ \sin \psi &= \hat{n} \cdot \hat{s} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

## ANNEXE C

### PRÉSENTATION DES DIFFÉRENTES MÉTHODES NUMÉRIQUES DE CALCUL DE L'INTÉGRALE DE L'EXPONENTIELLE $\text{Exp}[Z]$

Comme mentionné dans le Chapitre 2, les méthodes numériques utilisées pour le calcul de l'intégrale de l'exponentielle complexe  $\text{Exp}[z]$  constituent un sujet qui a intéressé bon nombre de spécialistes, notamment Kluskens [10], Whetten [27], Richmond [20] et Tilston [25]. La rapidité d'exécution de cette intégrale est très importante afin d'obtenir une routine de calcul de l'impédance rapide, cependant pour des raisons de clarté, nous avons choisi de présenter ce sujet en annexe. Celle présente les différentes méthodes de calculs et les performances de chacune d'entre elles. On montrera que la méthode de Kluskens est la plus performante.

Cette sous-routine d'évaluation de l'intégrale est souvent appelée pour chaque calcul d'impédance dipôle-dipôle (dans l'expression de Balanis,  $\text{Exp}(z)$  est appelé 16 fois, pour chaque calcul d'impédance monopôle à monopôle, donc 64 fois pour le cas dipôle à dipôle). Une analyse des performances montre qu'elle représente une bonne partie du temps de calcul par rapport aux autres opérations arithmétiques effectuées pour calculer l'impédance. Les performances totales sont dépendantes du temps d'exécution de cette sous-routine. Des routines développées par différents auteurs sont étudiées dans la prochaine section afin d'en choisir la plus appropriée.

### Calcul de $\text{Exp}[z]$ à l'aide de l'algorithme de Tilston [25]

Tilston a utilisé la méthode de Simpson pour évaluer l'intégrale de l'exponentielle. Les performances en termes de temps de calculs de cette méthode sont présentées plus loin.

Cependant, la précision décroît si la longueur du parcours d'intégration est plus grande que  $\pi$ .

### Calcul de $\text{Exp}[z]$ à l'aide de l'algorithme de Richmond [20]

Richmond décompose l'intégrale définie en une somme de deux intégrales semi-définies.

$$W_{12} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{e^{-v} dv}{v} = E_1(v_1) - E_1(v_2) + j \, 2n\pi \quad (\text{C.1})$$

avec  $E_1(z)$  donné par :

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t} dt}{t} \quad (\text{C.2})$$

Le parcours d'intégration est une ligne droite de  $v_1$  à  $v_2$  dans le plan complexe  $v$ . Il existe des singularités sur l'axe réel négatif ( $x < 0$ ) que l'on contourne en passant par l'origine. C'est pourquoi on doit ajouter le terme  $j \, 2n\pi$ .  $n = 1$ , dans le cas où on traverse l'axe réel négatif dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.  $n = -1$ ,



dans le cas où on traverse l'axe réel négatif dans le sens des aiguilles d'une montre.

Finalement,  $n = 0$  dans le cas où on ne traverse pas l'axe réel négatif.

L'équation C.2 est approximée de quatre manières différentes afin d'obtenir de meilleures performances dans chacune des régions :

- développement en série de Taylor (Abramowitz, équation 5.1.11 [1])
- intégration par quadrature de Gauss-Legendre (6 ou 15 points) (Abramowitz, Tableau 25.9 [1])
- approximation par fraction rationnelle (rapport de polynome) ( $z > 10$ ) (Abramowitz, équation 5.1.56 [1])
- approximation par une somme de fractions (Abramowitz, Tableau 5.6 [1])

La condition de branchement à l'une ou l'autre des méthodes est indiquée dans la routine de Richmond. La documentation fournie sur cette routine est très succincte. C'est pourquoi les relations mathématiques qui y sont utilisées sont données sans développement :

$$E_1(z) \approx \begin{cases} -\gamma - \ln(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z)^n}{nn!} & |arg z| \leq \pi \\ \sum_{i=1}^{(6ou10)} w_i \frac{e^{-z_i}}{z_i} & Re\{z\} \leq 3 \\ \frac{1}{ze^z} \frac{\sum_{n=1}^{(6ou10)} a_n z^n}{\sum_{n=1}^{(6ou10)} b_n z^n} & Re\{z\} \leq -9 \\ \frac{1}{e^z} \sum_{n=1}^7 \frac{a_i}{b_i + z} & |arg z| \geq 10 \end{cases} \quad (C.3)$$

### Calcul de $\text{Exp}[z]$ à l'aide de l'algorithme de Whetten [27]

Whetten, Liu et Balanis ont développé un algorithme dont la convergence a été grandement contestée par Kluskens. En effet, celui-ci a montré que, pour certaines valeurs, le développement en série de Taylor divergeait. Un aperçu de la méthode et le résultat final sont donnés ici.

#### Développement de la série pour de petits arguments

Pour de petits arguments, la série de Taylor est utilisée. L'intégration par parties donne :

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-u}}{u} du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-u} - 1}{u} du \quad (\text{C.4})$$

Le développement en série du deuxième terme après intégration donne :

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-u} - 1}{u} du = \left[ -u + \frac{u^2}{2(2!)} - \frac{u^3}{3(3!)} + \cdots + (-1)^N \frac{u^N}{N(N!)} \right]_{u_1}^{u_2} + R_N(u) \quad (\text{C.5})$$

#### Développement de la série pour de grands arguments

Dans le cas où les bornes supérieure et inférieure sont situées à l'extérieur du cercle unitaire, on peut définir  $E(u)$  tel que :

$$E(u) = \int_c^u \frac{e^{-u}}{u} du + E(c) \quad (\text{C.6})$$

où  $c$  est un point de référence défini comme :

$$c = \frac{u_1 |u_2^2| - |u_1^2| u_2 \pm |u_1| |u_2| (u_2 - u_1)}{u_1 u_2^* - u_1^* u_2} \quad (\text{C.7})$$

où  $u_1^* u_2^*$  représente les complexes conjugués de  $u_1 u_2$ . On définit

$$a_n = -\left(-\frac{v}{c}\right)^n e^{-v} - \frac{n}{c} a_{n-1} \quad (\text{C.8})$$

$$S_N = \sum_{n=0}^N a_n = -\left(-\frac{v}{c}\right)^N e^{-v} - \left(1 - \frac{N}{c}\right) a_{N-1} + S_{N-2} \quad (\text{C.9})$$

et on a alors :

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{-u}}{u} du = \frac{e^{-c}}{c} [S_N(u_2 - c) - S_N(u_1 - c)] + R_N(u) \quad (\text{C.10})$$

On retrouve l'analyse de la troncature de l'erreur dans [27].

### Calcul de $\text{Exp}[z]$ à l'aide de l'algorithme de Kluskens [10]

On cherche une méthode rapide et précise pour évaluer l'équation 2.21. Pour résoudre ce problème, l'approche de Kluskens consiste à utiliser le théorème de Leibniz pour calculer le développement en série de Taylor de l'intégrale, (contrairement aux auteurs précédents qui ont toujours intégré les termes du développement de l'intégrand tel que cela a été montré dans la section précédente C).

Soit l'équation 2.21 qui définissait les variables  $u_1$  et  $u_2$  et soit les changements de variables suivants :

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{u_1 - u_2}{2} \\ u &= \frac{u_1 + u_2}{2}\end{aligned}\tag{C.11}$$

L'équation 2.21 s'écrit alors :

$$E(u, \delta, u_3) = e^{u_3 - u} e^u \int_{u-\delta}^{u+\delta} \frac{e^{-z}}{z} dz \tag{C.12}$$

Avec  $E_k(u, \delta)$  défini par :

$$E_k(u, \delta) = e^u \int_{u-\delta}^{u+\delta} \frac{e^{-z}}{z} dz \tag{C.13}$$

on obtient :

$$E(u, \delta, u_3) = e^{u_3 - u} E_k(u, \delta) \quad (\text{C.14})$$

On s'intéresse maintenant à l'évaluation de  $E_k(u, \delta)$ . En examinant les intervalles de valeurs que peut prendre l'équation C.13, le domaine d'intégration est le suivant (voir Figure C.2) :

$$u \in ]-\infty, \infty[, \quad \delta \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (\text{C.15})$$

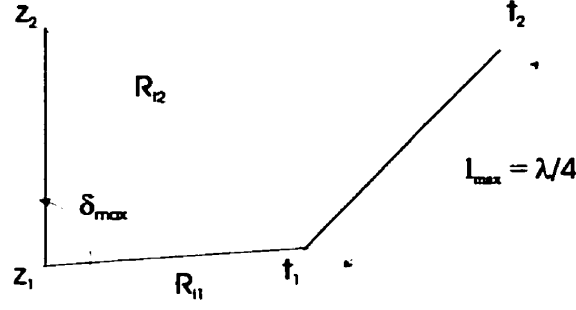
On suppose que la longueur des monopôles (magnétiques et électriques) n'exécède pas  $\lambda/4$ . La justification est alors donnée (après quelques manipulations) par la Figure C.1 et l'équation suivante :

$$\delta_{max} = k(|R_{i2} - R_{i1}| + |t_2 - t_1|)/2 = (\lambda/4 + \lambda/4)/2 = \pi/2 \quad (\text{C.16})$$

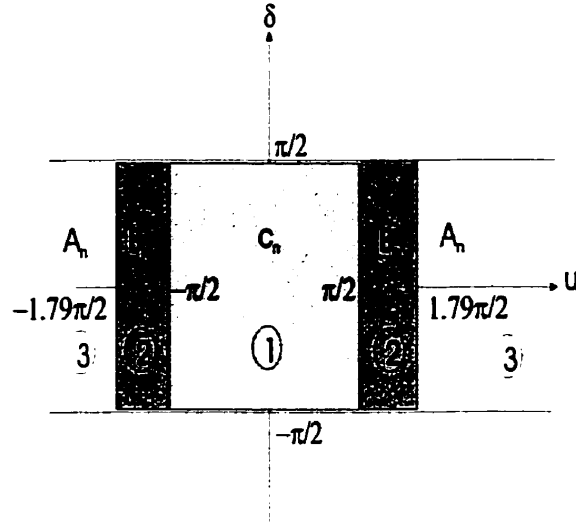
avec  $k = 2\pi/\lambda$

L'auteur a découpé le plan complexe en 3 régions (régions dénotés 1,2,3 dans la Figure C.2) afin d'assurer la convergence dans chacune d'elle.

On retrouve le détail du développement en série dans [10]. Seuls, les résultats



**Figure C.1:** Configuration des monopôles donnant une valeur maximale de  $\delta$



**Figure C.2:** Découpage du domaine d'intégration avec  $(u + j \delta) \in \mathbb{C}$

finaux programmés dans la routine *EXPJ1* sont montrés :

$$E_k(u, \delta) \approx \begin{cases} 2 \sum_{n=1,3,\dots}^N A_n & 1.79|\delta| \leq |u| \\ e^u \ln \frac{u+\delta}{u-\delta} + \frac{2}{u} \sum_{n=1,3,\dots}^N b_n \frac{\delta^n}{n!} & 1.79|\delta| \leq |u| \leq |\delta| \\ 2 \sum_{n=1,3,\dots}^N A_n & 1.79|\delta| \leq |u| \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

Les termes des séries (pour  $n > 1$ ) des équations C.17 sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\delta^2}{nu^2} \left[ \frac{\delta^{n-2}}{(n-1)!} (u+n-1) + (n-2)A_{n-2} \right] \\ B_n &= \frac{\delta^2}{nu^2} \left[ \frac{\delta^{n-2}}{(n-1)!} (u+n-1) + (n-2)B_{n-2} \right] \\ c_n &= \frac{1}{n} \left[ 1 + \frac{u}{n+1} (1 + uc_{n+2}) \right] \end{aligned} \quad (C.18)$$

La récursion de  $c_n$  commence avec  $c_{n+2} = 0$  avec un  $n$  suffisamment grand, le troisième développement de l'équation C.17 converge rapidement. Et pour  $n=1$ ,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\delta}{u} \\ B_1 &= \frac{\delta(1+e^u)}{u} \end{aligned} \quad (C.19)$$

### Performances entre les différentes méthodes de calcul de l'intégrale exponentielle $\text{Exp}[z]$

Kluskens a démontré sur une variété de plates-formes [10] que la convergence de sa routine (*EXPJ1*) était plus performante que les routines de ses prédécesseurs.

Une simple simulation permet d'évaluer le temps de calculs et la précision numérique pour chacune des quatre routines (Tableau C.1). Les routines de Tilston, Kluskens et Richmond ainsi qu'une méthode (non documentée et appelée méthode Abramowitz ou la routine *EXPINT*) utilisant un développement en série (l'équation 5.1.11 de Abramowitz [1]) pour des valeurs de  $\text{Re}(z)$  comprises  $[-38, 2]$  et des frac-

**Tableau C.1:** Précision numérique et temps de calcul entre les méthodes de calcul de la fonction  $\text{Exp}[z]$

	Richmond <i>EXPJ</i>	Tilston <i>EXPJ3</i>	Kluskens <i>EXPJ1</i>	Abramowitz <i>EXPINT</i>
err rel max	1,7E-4	9,2E-1	9,9E-6	21,1
err rel moy	1,6E-6	1,8E-3	4,6E-6	2,8E-1
temps de calcul (s)	13	13	7	350

tions continues pour tout autre  $z$ , (l'équation 5.1.22 de Abramowitz) seront utilisées. On utilise aussi l'équation C.1 permettant de transformer cette intégrale définie en une somme d'intégrales semi-impropres. Le Tableau C.1 montre les performances entre les méthodes de calculs (effectuées sur une station pc processeur pentium). Le temps total correspond à 6 240 000 calculs (soit une grille de 20000 par 62) sur le domaine  $u \in [-10, 10]$  et  $\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Les erreurs relatives pour les colonnes des méthodes Richmond, Tilston et Abramowitz sont supérieures à la méthode de Kluskens.

Kluskens a comparé sa méthode avec une méthode de quadrature Gauss-Legendre et obtenu une précision relative de l'ordre de  $10^{-6}$ . Les erreurs relatives dans la colonne de Kluskens se retrouvent dans son article.

Enfin, on observe que la méthode Abramowitz et la méthode de Tilston sont peu précises et relativement lentes. La méthode de Kluskens semble être la plus performante à tous points de vue. Elle est utilisée dans l'algorithme hybride.